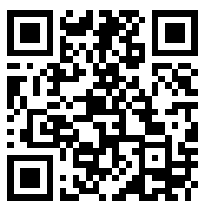
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

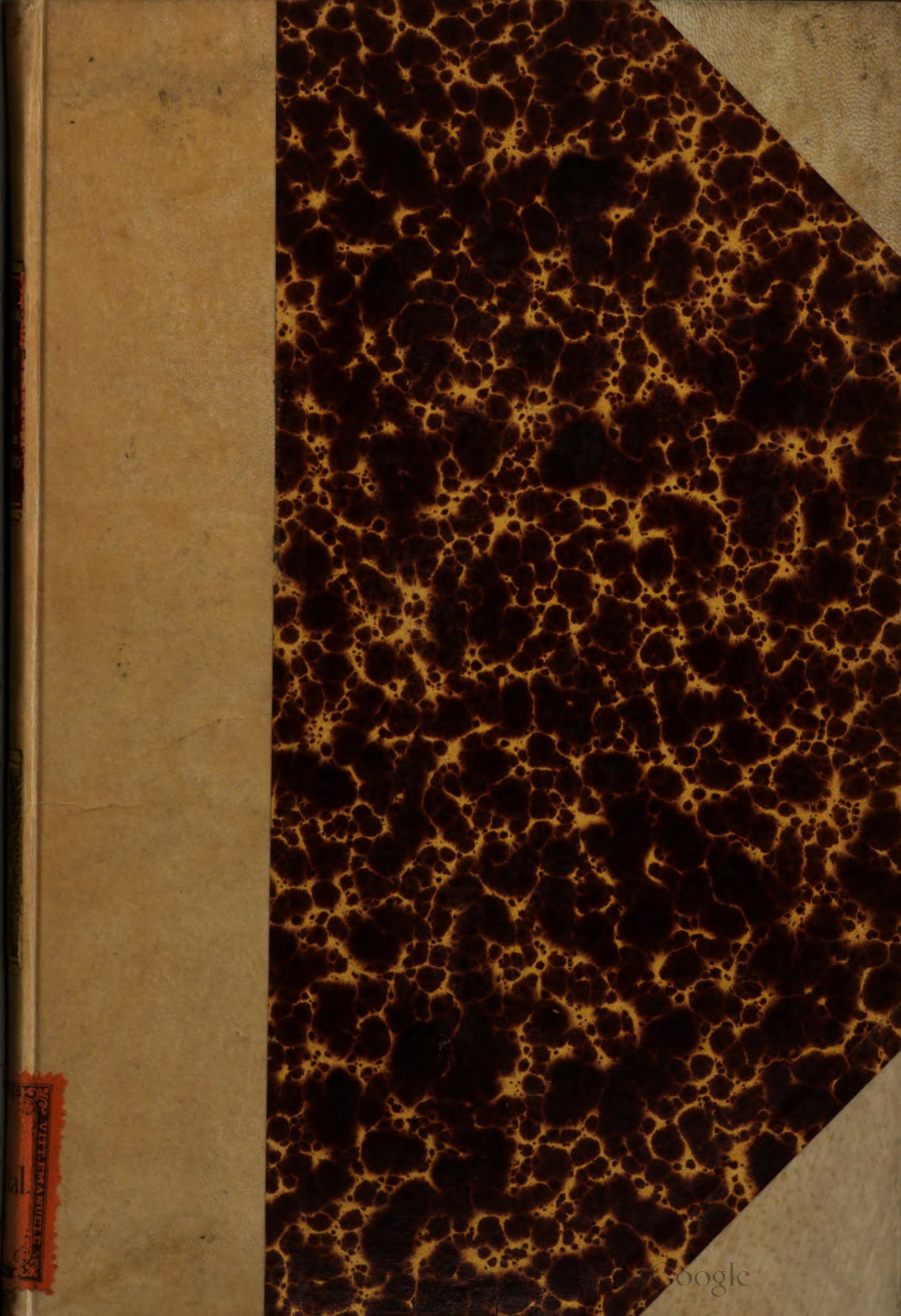
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

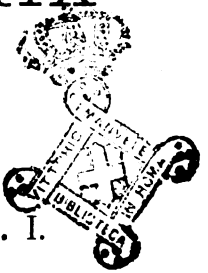
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XII — FASC. I.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1910

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18. e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

L. Frati, Scipione dal Ferro, pag. 1-5.

Principi della Geometria (Wilbert, Pieri) pag. 1-13.

Geometria analitica (Runge, Dette) pag. 14-15.

Geometria differenziale (Bianchi) p. 16-22.

Geometria della retta (Weitzenboch) p. 22.

Geometria descrittiva (Richter) p. 23-25.

Probabilità (Czuber) p. 25-26.

Attuaria (Manes) p. 27.

Attualità (Annuaire du Bureau des longitudes) p. 27-28.

P. Burgatti, V. Cerruti, p. 28-32.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

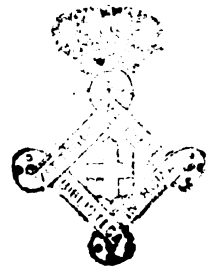
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XII
1910



TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18

1910

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Digitized by Google

INDICE

L. Fratl. Scipione dal Ferro, p. 1-5.
G. Vacca. Sulla storia del principio d'induzione completa, p. 33-35.
J. Lüroth. Julius Weingarten, p. 65-70.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie (G. L.), p. 6. — **M. Pieri.** La geometria elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera » (G. Marletta), p. 6-13. — **C. Runge.** Anal. Geometrie der Ebene (G. L.), p. 14-15. — **W. Dette.** Anal. Geometrie der Kegelschnitte (G. L.), p. 15-16. — **L. Bianchi.** Mém. sur la théorie des surf. applic. sur les quadriques générales; Lez. di geom. differenziale (G. Fubini) p. 16-22,97-103. — **R. Weitzembock.** Kemplex-Simbolik (G. H. Sisam) p. 22-23. — **O. Richter.** Kreis und Kugel, p. 23-25. — **E. Czuber.** Wahrtscheinlihkeitsrechnung, I (P. Pizzetti) p. 25-26. — **A. Manes.** Versicherungs-Lexicon (G. L.) p. 27. — Annuaire du Bureau des longitudes (G. L.), p. 27-28,123. — **P. Harzer.** Ueber geom. Methode zur Bestim. der Bahnen von Himmelskörpern, p. 35. — **F. Schur.** Grundlagen der Geometrie (B. Levi), p. 36-43. — **M. Simon.** Didaktik und Methodik des Rechnens und der Math. (G. L.), p. 44-48. — **A. Gutzmer.** Vorschläge für die wiss. Ausbildung (G. L.), p. 49. — **Z. G. de Galdeano.** Espos. sumaria de las theorias mathem. Algunas consid. sobre filos. y ensenanza (G. L.), p. 49-50. — **E. Dintzel.** Einf. in die Funktienenlehre; **O. Lesser.** Graphische Darstellungen (G. L.), p. 50-51. — **O. Borel.** Die Elemente de Mathematik I; **J. Tannery.** Elemente der Mathematik (G. L.), p. 52. — **G. Müller.** Zeichnende Geometrie (G. L.), p. 52-54. — **A. Adler.** Theorie der geom. Konstruktionen (G. L.), p. 54-56. — **H. Minkowski.** Diophantische Approximationen (F. Sommer), p. 56-59. — **Karnasch.** Bew. für den Fermatschen Satz (G. Vivanti), p. 59-60. — **F. S. Palmieri.** Elem. di aritm. e algebra (G. Vivanti), p. 60-61. — **E. Timerding.** Geometrie der Kräfte (G. Guareschi), p. 70-71. — **C. Burali-Forti** e **R. Marcolongo.** Calcolo vettoriale (U. Cisotti), p. 70-73. — Simposium on mathematics (P. Stäckel), p. 73-81. — **E. Lebon.** Savants du jour, I, II, III (G. L.), p. 81-83. — **W. Ahrens.** Latein oder Deutsch? (G. L.), p. 83-84. — Atti del IV Congresso dei matematici (G. L.), p. 84-85. — **E. Mach.** Principii della meccanica, p. 85-87. — **F. Cajori.** Storia della fisica (G. L.). Cantor's Festschrift (G. L.), p. 88-89. **H. Burckhardt.** Differential und Integralrechnung (G. Vivanti), p. 90-93. — **H. Weber.** Algebra Bd. III (G. L.), p. 102-105. — **R. d'Adhémar.** Exercises et leçons d'analyse (G. Vivanti), p. 105. — **E. Landau.** Verteilung

Digitized by Google

der Primzahlen (G. Torelli), p. 106-111. — **F. Enriques** e **U. Amaldi.** Elementi di geometria (G. Scorza), p. 112-114. — **F. Richarz.** Maxwellsche Theorie (L. Rolla), p. 114-115. — Rassegna delle recenti dissertazioni (G. L.), p. 115.121. — Compte-rendu du congrès des mathém. tenu à Stockholm (G. L.), p. 121.

NECROLOGIO

P. Burgatti. Valentino Cerruti, p. 28-32.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

V. Volterra Corso di tre conferenze tenute all' Università Clark, p. 61-62.

NOTIZIE

Museo di strumenti. Mecenatismo americano. Per la storia del regolo calcolatorio. Una nuova società matematica. Il I centenario della nascita di Grassmann. Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. p. 63-64.

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche, p. 94-96.

Quale era la professione di L. Fibonacci? Un nuovo organo di bibliografia matematica. Errata-corrige. Temi posti a concorso dalle Accademie di Berlino, di Madrid e di Danimarca, dalla Facoltà filosofica di Berlino, da un anonimo dilettante e dalla Società scientifica di Bruxelles. Due premi Loatschewsky. Per la biografia di G. Libri, p. 123-128.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XII — Gennaio, Febbraio e Marzo — 1910

SCIPIONE DAL FERRO

di LODOVICO FRATI

Bologna ebbe nel cinquecento matematici illustri come Scipione di Floriano dal Ferro, che ha il merito di essere stato il primo che riescì a risolvere le equazioni algebriche di terzo grado, e Lodovico Ferrari, che trovò prima d'ogni altro la risoluzione delle equazioni di quarto grado, e questo fu, secondo il Tiraboschi (1), « l'estremo confine a cui giunsero le scoperte algebriche, oltre il quale non sono ancora passate ».

Ma se di Lodovico Ferrari abbiamo sufficienti notizie biografiche (2), non altrettanto può dirsi del suo predecessore Scipione dal Ferro.

Il prof. Silvestro Gherardi nella sua dottissima memoria: *Di alcuni materiali per la storia della facoltà matematica nell'antica Università di Bologna* (3), dopo avere criticamente esaminata la questione relativa alla scoperta di Scipione Dal Ferro, la via che tenne per raggiungerla, e come poi questa fosse ad altri matematici comunicata, soggiunge (p. 330):

« Non abbiamo da nessuna storia, da nessuna memoria gli « anni della nascita e della morte di questo peregrino ingegno « del Ferro. I monumenti di questo antico Studio, scarsissimi « per que' secoli, non servono che a fissare il tempo della car- « riera di lui nel medesimo, cioè i trent'anni dal 1496-7 al 1525-6, « che vi tenne cattedra ».

Che molti degli antichi documenti dello Studio bolognese siano andati smarriti purtroppo è vero; ma forse è anche vero che niuno finora si diè premura di ricercare pazientemente e con metodo notizie del celebre matematico bolognese. Tant'è

(1) *Storia della letter. ital.* (Modena, 1791, T. VII, P. II, p. 532).

(2) Cfr. FANTUZZI. *Scrittori bolognesi* (III, 321; MONTUCLA. *Histoire* (T. I, p. 596 e 602; GHERARDI, nei *Nuovi Annali delle Scienze natur.* (Ser. III, T. I, p. 216 e seg.).

(3) Ivi (Ser. II, T. V, pp. 161, 211, 321, 401).

Digitized by Google

vero che quando recentemente il prof. Ettore Bortolotti lagnavasi meco della mancanza di notizie biografiche di Scipione Dal Ferro, mi prese vaghezza di tentare alcune ricerche negli archivi e nelle biblioteche di Bologna, e queste ebbero un risultato abbastanza soddisfacente.

Floriano di Gerio Dal Ferro padre di Scipione fu di professione cartolaio, ed abitava sotto la parrocchia di S. Biagio (1); la madre ebbe nome Filippa, e Scipione nacque il 6 febbraio 1465 (2), sotto la parrocchia di S. Giuseppe; ma poi cambiò abitazione, e quando dettò il suo primo testamento nel 1505, la sua casa era sotto la parrocchia di S. Bartolomeo di palazzo, situata nell' angolo a levante del vicolo Ghirlanda.

Le case abitate da Floriano in via Cartoleria nuova, presso S. Petronio vecchio, a settentrione, furono da Scipione prima affittate nel 1504, poi vendute nel 1512 a Corallo di Agostino Mazzoni cartolaro (3).

Della giovinezza di Scipione Dal Ferro non ci resta alcuna notizia. Nei *Libri partitorum* dell'Archivio di Stato incontrasi per la prima volta il suo nome quale Lettore di aritmetica e geometria il 23 dicembre 1496, collo stipendio di 25 lire, che gli fu raddoppiato nel 1504, e gli fu aumentato fino alle 100 lire il 23 ottobre 1507 (4). Il 31 gennaio 1509 gli gli fu confermato questo aumento privilegiato, come a matematico eccellentissimo (5), e il 27 marzo 1510 ottenne un nuovo aumento di 25 lire (6), che poi salì fino a lire 150.

Il suo nome scompare nei *Rotuli* del 1526, perchè erasi trasferito a Venezia; ma il 29 ottobre di quest'anno fu deliberato che egli fosse nuovamente inscritto, perchè era ritornato a Bologna, ove volea continuare a dimorare.

« Item per XXII albas et duas nigras obtentum fuit quod « restituatur in rotulo ad arithmeticam Magister Scipio de Ferro, « qui per DD. Reformatores Studii in proxima reformatione « omissus fuit describi, propter eius moram in civitate Venetia- « rum, attento eius reditu ut Bononiæ in patria resideat, et sic « in ea, non autem Venetiis, velle inhabitare affirmavit, cui « currat salarium suum » (7).

(1) Arch. notarile di Bologna. Rog. di Bernardo Fasanini, filza 1, n. 64.
(2) Carrati. *Spogli dei libri battesimali*, presso la Bibl. Comunale di Bologna (vol. I, pag. 103.
(3) Giudicini, *Cose notabili di Bologna* (vol. I, p. 225).
(4) V. Malagola, *Della vita e delle opere di Ant. Urceo.* (Bologna, 1878, p. 574-77).
(5) Arch. di stato di Bologna. *Partitorum*, 1509 (c. 9 r).
(6) *Partitor.* (c. 60 r.).
(7) *Partitor*, 1526, (c. 195 v.) Cfr. Malagola, Op. cit., Append. XXVII, doc. 3 e 4.

Digitized by Google

Durante la sua breve dimora a Venezia Scipione Dal Ferro fece un secondo testamento, per rogito del notaro veneto Bonifazio Soliano (1), nel quale, oltre ad altri legati, lasciava a sua moglie Cornelia di Salvatore Pennacchi di Lugo 500 ducati d'oro, nel caso che non potesse coabitare cogli eredi, Questi erano, molto probabilmente, sua figlia Filippa, e suo genero Annibale di Carlo dalla Nave, lo scolaro prediletto di Scipione Dal Ferro, che abitava in sua casa, e che successe al suo maestro nella cattedra universitaria, ereditando colle sostanze di lui anche il cognome; poichè continuò a denominarsi: Annibale dalla Nave *alias* Dal Ferro.

Nel suo primo testamento del 31 luglio 1505 Scipione lasciava a sua sorella Lodovica, moglie di Domenico Scaramanini, lire 200, e di tutti gli altri suoi beni nominava erede universale usufruttuaria la madre Filippa, erede proprietario il fratello Gabriele ed i figli di lui. Della moglie non è fatto cenno, forse perchè le sue nozze avvennero dopo il 1505, ma non molto, se, quando venne a morte nel 1526 aveva una figlia in età da marito, che, come dissi, l' 8 gennaio 1527 andò sposa ad Annibale Dalla Nave, col consenso della madre, di frate Alessandro Servita suo parente, di Annibale de' Preti uno dei commissarii nominati nel testamento e di molte persone d'ambo i sessi.

L' epoca approssimativa della morte di Scipione Dal Ferro si desume; come osservò il Malagola (2), da due notizie dei libri *Partitorum,* la prima del 29 ottobre 1526, relativa all'iscrizione del Dal Ferro nei rotuli dopo la sua partenza per Venezia, l' altro del 16 novembre dello stesso anno che riferisce la sua morte come avvenuta da pochi giorni.

A queste notizie della vita dell' illustre matematico bolognese ne aggiungerò poche altre, che si raccolgono da documenti archivistici.

Pare che egli sia stato anche contabile dei dazî sulle moline; certo dal 1517 al 1523 acquistò non pochi crediti, siccome ne fanno fede i rogiti dell'Archivio notarile di Bologna, ove troviamo che il 15 marzo 1517 (3) molti trombettieri e pifferai degli Anziani di Bologna gli cedettero un loro credito di lire 575 che avevano sul Monte del dazio delle moline.

---

(1) Ne abbiamo notizia da un rogito di Ippolito Fronti dell' 8 gennaio 1527, presso l'Arch. notarile di Bologna (Prot. 3, fol. 461); ma ne fecero ricerca inutilmente presso l'Archivio di Stato di Venezia il Direttore prof. Carlo Malagola e mio fratello Carlo Frati, Bibliotecario della Marciana, ai quali porgo cordiali ringraziamenti.

(2) Op. cit., p. 354.

(3) Rog. di Matteo Gessi, filza 6, n. 47.

Digitized by Google

Il 23 aprile dello stesso anno (1) Scipione Dal Ferro acquistò da Jacopo di Giovanni Vernocchi tagliapietre un altro credito di lire 165, e nello stesso giorno (2) ne acquistò pure uno di lire 45 da Domenico di Corradino da Rubiera. Il 7 novembre 1517 e il 12 novembre 1519 M.° Jacopo Maria d'Antonio dal Lino patrizio bolognese vendette a Scipione Dal Ferro due suoi crediti, uno di lire 460 e l'altro di lire 66 (3). Altri crediti acquistò pure lo stesso Scipione da Matteo Torelli il 6 aprile 1510 per lire 240 (4), e da Domenico Zani drappiere il 27 luglio 1523 per lire 2007 (5). Tutti questi rogiti di compre e altri di vendite fatte da Scipione provano la sua agiatezza acquistata mediante il suo insegnamento.

Dalle notizie biografiche passando alla scoperta che rese celebre il suo nome, non occorre che ripeta qui ciò che scrisse Guglielmo Libri nella sua *Histoire des sciences mathématiques* (6), e l'elogio che il Cardano (7) ci trasmise di Scipione Dal Ferro.

« Egli (come scrisse il Libri) superò un ostacolo che già « reputavasi insormontabile, e aprì il cammino ad altri alge- « bristi, che proseguirono e fecondarono le sue ricerche ».

« Ma che via tenne il Dal Ferro (si chiede il Gherardi), « qual novissimo metodo inventò e il condusse alla peregrina « scoperta? Quale fu la regola trovata da lui per la soluzione « generale di quelle equazioni? La professò in iscuola, la stese « in iscritto, la pubblicò, la confidò ad alcuno?

Troppo lungo sarebbe seguire il Gherardi nelle sue indagini per rispondere a tanti quesiti. Ricorderò solo che il metodo trovato da Scipione Dal Ferro, secondo alcuni, fu confidato ad Antonio Del Fiore suo allievo, e poco dopo sembra fosse indovinato dal Tartaglia, che lo partecipò al Cardano sotto la più solenne promessa che mai l'avrebbe divulgato. Ma il Cardano ben presto mancò alla parola data e pubblicò il metodo della risoluzione. Da quel momento sorse inimicizia fra i due matematici, ed una lunga disputa scientifica.

Il Cardano suscitò contro il Tartaglia uno dei suoi scolari, il celebre Lodovico Ferrari bolognese, che avea scoperta la risoluzione dell'equazione d quarto grado. Coteste dispute si facevano nel modo più solenne; perchè i due campioni marciavano

(1) Ivi, n. 73.
(2) Ivi, n. 74.
(3) Ivi, n. 124 e Filza 8, n. 32.
(4) Ivi, n. 107.
(5) Ivi, filza 9, n. 72.
(6) Paris, 1840, T. III, p. 148.
(7) *Ars magna*. In: *Opera omnia*. (Lugduni, 1663, vol. IV, p. 222).

Digitized by Google

in processione, colle loro bandiere, accompagnati dagli araldi e da una folla di popolo che vi accorreva come ad un torneo cavalleresco (1).

Il prof. Gherardi ebbe la fortuna di trovare l' unico esemplare che si conosca dei dodici cartelli di sfida, stampati a Milano nel 1547 e 48, e se ne giovò assai per chiarire la questione relativa alla scoperta fatta da Scipione Dal Ferro, ed al modo come fu comunicata agli studiosi. Egli dimostrò che « la « peregrina invenzione nacque e visse nella scuola matematica « dello Studio bolognese per cinque lustri circa, vivente e leggente l' inventore stesso; per altri sei e più nel libro scritto « di sua mano, in che l' invenzione stessa era dottamente ed « elegantemente dichiarata (2); libro passato dall'autore e maestro « al suo discepolo e successore, dal suocero al genero ».

È quindi inesatto ciò che fu affermato dal Libri (p. 149) che Scipione Dal Ferro morisse senza pubblicare la sua scoperta, e che il suo metodo perisse con lui. Il prof. Gherardi crede verosimile che il Cardano, prima di vedere l' opuscolo del Dal Ferro si fosse « profondato tanto nel soggetto in discorso che « bastasse a discoprire una via conducente alla formola, una « dimostrazione generale ed esatta della medesima. Che quindi « nel suo passaggio per Bologna, insieme col Ferrari, avessero « insieme ricorso al compatriota di questo, e forse amico del « medesimo Annibale dalla Nave, perchè apprendesse loro tutti « i particolari della scoperta del proprio suocero e antecessore « di cattedra; e che, avutone cortesemente da esaminare il sud- « detto opuscolo manoscritto, questo aprisse loro e quella via, « e quella dimostrazione, onde di lì innanzi senza ostacoli potesse « ciascuno d' essi col suo genio l'astrusa materia avanzare, sco- « prirvi la risoluzione delle equazioni biquadratiche, ecc., giun- « gere insomma a poggiarla all' altezza eminente, a cui fu am- « mirata nell'*Ars Magna* e per cui ancora nella nostra opinione « il Cardano ed il Ferrari palesaronsi supremi matematici ».

Il merito di Scipione Dal Ferro fu riconosciuto ed apprezzato anche dai contemporanei, come ne fanno fede, oltre il suo testamento del 1505, ov' è appellato *arithmeticae et geometriae princips*, i frequenti e privilegiati aumenti di stipendio che riceveva quale Lettore dello Studio ed eccellente matematico.

(1) V. Riccardi. *Bibliotheha mathemat.* (P. I, vol. III, p. 499).

(2) Nel secondo cartello di sfida dell'Aprile 1547 si legge; « Anno ab « hinc quinto (cioè nel 1543) cum Cardanus Florentiam profisceretur, egoque « ei comes essem, Bononiae Annibalem visimus, qui nobis ostendit libellum « manu Scipionis Ferrei soceri sui jamdiu conscriptum, in quo istud in- « ventum eleganter et docte explicatum tradebatur ». (V. *Nuovi Annali delle scienze naturali*. Ser. II, T. V, p. 340).

Digitized by Google

Principi della Geometria.

D. HILBERT. — *Grundlagen der Geometrie.* Dritte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhänge versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. 8° p. VI 279. Leipzig, Teubner 1909 (Prezzo del vol. leg. Mk. 6).

Della prima edizione di questa celebre opera il *Bollettino* ha dato ampia notizia quando vide la luce (v. T. III, 1900 p. 3). Della seconda fu dato l'annuncio (T. VII, 1908, p. 124). Altrettanto facciamo per questa terza edizione, la quale appare come elemento della collezione di scritti di filosofia scientifica che la Casa Teubner ha da qualche tempo intrapresa col titolo « Wissenschaft und Hypothese ». Nel dar fuori per la terza volta il suo scritto l'A., vi pose come appendice le cinque memorie di cui egli corredò anche l'edizione precedente ed inoltre l'articolo *Ueber den Zahlbegriff,* pubblicato per la prima volta nel 1900, nonchè la comunicazione *Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* fatta nel 1904 al III Congresso internazionale dei matematici.

G. L.

M. PIERI. — *La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera ».* — Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL). Serie 3.ª, Tomo XV.

Il proposito (che ebbe già illustri patrocinatori in G. W. LEIBNIZ e G. BOLYAI) di costruire la Geometria elementare e il relativo gruppo fondamentale di trasformazioni, muovendo dalle nozioni di « punto » e di « sfera intorno ad un punto » anzi che dai concetti di punto, retta, piano, congruenza, ecc., può dirsi che abbia raggiunto per la prima volta uno sviluppo adeguato nella presente Memoria del Prof. PIERI, dove il contenuto essenziale degli « Elementi » viene ad esser riprodotto sotto nuovi aspetti, e in buona parte rifatto in armonia con gli intenti e le esigenze del metodo deduttivo, più rigoroso. I concetti primitivi del nuovo « sistema ipotetico deduttivo » son questi soli: il punto, e una certa relazione fra tre punti $a, b, c,$

(1) Fra gli altri volumi di questa raccolta sinora pubblicati siaci lecito segnalare ai nostri lettori la II edizione del ben noto saggio del Prof. M. Planck sopra « Das Prinzip der Erhaltung der Energie », premiato nel 1887 dalla Facoltà filosofica di Gottinga.

Digitized by Google

la quale si esprime dicendo che « c dista da a quanto b », o che « c appartiene alla sfera di b centro a ». Per mezzo di essi l'A. definisce man mano tutti quanti gli oggetti che occorrono in Geom. Elem., richiamandosi a ventiquattro proposizioni primitive (da lui proposte come assiomi o postulati fondamentali) le quali, caratterizzando opportunamente il punto e la sfera intorno ad un punto, conducono per via puramente deduttiva, ai fatti e alle teorie principali di questa Scienza. Alle ragioni di varia specie, che consigliavan la scelta di quei due elementi primordiali, a preferenza di altri, per formare lo spazio geometrico ordinario (euclideo), l'A. ne aggiunse una nuova da parte sua (*): e cioè che alla purezza ed eleganza deduttiva d'un sistema geometrico debba giovare il fatto, che gli enti primitivi siano invarianti per tutte le trasformazioni (nel caso nostro sarebbero le similitudini) che non hanno poter di alterare le proprietà che si studiano, ma non per un qualche gruppo più esteso. Ora la retta d'Euclide (ad es.) è invariante rispetto al gruppo più ampio delle *affinità* (omografie che conservano il parallelismo); mentre è caratteristico della similitudine il conservare la relazione di equidistanza da un punto (§ 4°).

Come l'A. stesso ci avverte nella Prefazione, questo lavoro « non ha vesti o pretese didattiche », ma piuttosto « intenti speculativi e critici » — come di confermare la possibilità d'una Geometria Elementare « sciolta da ogni vincolo di servitù con l'intuizione spaziale » ed atta a subire in ogni parte le leggi più rigorose del metodo deduttivo. Per altro l'A. non dissimula una certa fiducia di poter giovare con l'opera propria, anche ai giovani che, già iniziati alla Geometria elementare, bramassero sia di approfondirne le basi, sia di rifarne o modificarne il trattato con mezzi più idonei e più conformi alle moderne esigenze. Non fa uso di alcun logoritmo logico.

Daremo conto sommariamente del contenuto d'ogni singolo capitolo.

Nel § 1 (ammessa l'esistenza di *più* punti coi Post.ⁱ I e e II) i Post.ⁱ III, IV e V dànno le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'« *equidistanza* da un punto ». Indi (seguendo il Leibniz) si definisce la *retta congiungente* A con B, come la classe dei punti X, per ognuno dei quali le sfere di X intorno ad A e B non hanno punti comuni da quello in fuori. Rimettendo a più tardi di stabilir l'effettiva esistenza di quanti si vogliano punti sopra la retta, l'A. si limita qui a dimostrare che i punti A e B appartengono sempre alla loro congiungente.

(*) Congrès intern. de Philosophie, Paris 1900.

Digitized by Google

Dopo il Post. IX si dimostra che se C e D sono punti distinti di AB, sarà sempre AB=CD; ossia che la *retta* è individuata da due qualunque dei suoi punti. — Il piano si definisce (con LEIBNIZ) analogamente alla retta, dicendo che esso è il luogo dei punti X, per ognuno dei quali le tre sfere di X intorno A, B, C non abbian punti comuni diversi da X. Dopo i Post. X e XI si dimostra che un piano è individuato da tre de' suoi punti non collineari; e quindi, immediatamente, che una retta giace tutta in un piano ogni qualvolta ne contiene due punti diversi.

Col Post. XII si ammette l'esistenza del punto *medio* M≡A|B che, sulla retta AB, equidista da A e da B, e se ne dimostra l'unicità; e con ciò risulta pure stabilita l'esistenza di un terzo punto di AB diverso da A e da B. Il Post. XIII afferma l'esistenza di un *sol* punto diverso da B e comune ad AB e alla sfera di B centro A; questo punto è chiamato il *simmetrico* (o l'*equinverso*) di B rispetto ad A, simboleggiato in B/A. Il Post XIV e il Teor. seguente permettono di definire il *simmetrico* di un punto rispetto ad una retta, e di affermar l'esistenza di *un* punto sul piano ABC, fuori dalle rette AB, BC, CA. Il Post. XV dice che due punti equidistanti da un terzo, hanno i loro simmetrici (rispetto a una retta) equidistanti dal simmetrico del terzo punto: e cioè che la simmetria rispetto ad una retta (o *semigiro* intorno alla retta) muta le sfere in sfere conservandone i centri, quindi anche le rette in rette; i piani in piani, ecc. Data la capacità deduttiva (che risulta grandissima) di una proposizione sì fatta, sarebbe desiderabile una scomposizione logica di detto principio XV in altri fatti geometrici più elementari.

Nel § 2 dopo alcuni Teor. d'introduzione si definisce che « la retta *r* è *perpendicolare* alla retta *s* » quando *r* è autosimmetrica rispetto a *s*, ma non coincide con questa. La proprietà conversiva di questa relazione di « ortogonalità » fra due rette, si dimostra subito dopo; indi si prova che. se *r* ed *s* son perpendicolari fra loro, un punto qualunque di *r* e il suo simmetrico rispetto al punto *rs* equidistano da ciascun punto di *s*. Seguono i noti Teor. circa la retta perpendicolare ad una data, e passante per un punto dato.

Il Post. XVII afferma l'esistenza di qualche punto che non appartiene ad un punto dato. Ne segue il noto Teor. (che qui differisce assai poco dal Post. XI) dal quale si deduce la Def. di retta perpendicolare ad un piano. Il Post. XVIII afferma che qualsiasi sfera è incontrata da ogni retta che ne contenga il centro. Che i punti d'incontro siano *due*, viene poi dimostrato.

Digitized by Google

Appresso, definita la « *rotazione* intorno ad una retta r » come il prodotto di due semigiri intorno a rette diverse perpendicolari ad r in un medesimo punto, si dimostra che ogni rotazione trasforma le sfere in sfere conservandone i centri; e quindi le rette in rette, i piani in piani; ecc. Il Teor. delle tre perpendicolari è stabilito al solito modo (come in LEGENDRE). Il Post. XIX afferma che se le sfere d'un punto D intorno a tre punti non collineari A, B, C s'incontrano ancora in un punto diverso da quello, p. es. in E, non possono avere alcun punto comune diverso da D e da E. Ne segue che questa coppia D, E non muta al variar di A, B, C nel piano ABC. Il punto E è il *simmetrico* di D rispetto al piano ABC. Indi si constata l'unicità della perpendicolare ad un piano in un punto di questo, e si prova che le perpendicolari ad una retta in uno stesso punto di questa giacciono tutte in un piano, *piano perpendicolare* alla retta in quel punto. Notevole è la dimostrazione del Teor. che afferma l'esistenza di una retta comune a due piani che s'incontrano. Questo Teor. è conseguenza del Post. XIX, il quale esclude pertanto la *quarta* dimensione. Seguono diverse proprietà relative alla simmetria planare o *specchiamento*, la Def. di piani *perpendicolari* fra loro; ecc.

Nel § 3 dopo alcuni Teor. circa l'intersezione di una sfera con un'altra o con un piano, si definisce la *polosfera* di due punti A. B, come sfera passante per A (o per B) e avente per centro il punto medio A|B. Un punto dicesi *interno* ad una sfera, quando esiste una coppia di punti distinti A e B della sfera, la quale ammette P per punto medio; ecc. Ad alcuni Teor. circa i punti interni od esterni ad una sfera (o ad un cerchio) fa seguito la Def. del *segmento* |AB|, come luogo dei punti che *giacciono fra* due punti dati A e B — vale a dire dei punti ognuno dei quali, oltre ad essere allineato con gli A e B, è anche interno alla polosfera di A e B — più gli stessi punti A e B. Se è A=B, il segmento |AB| si riduce ad un punto; se A e B sono distinti, |AB| contiene almeno il lor punto medio. Il Post. XXI afferma (col PASCH) che nessuna retta giacente sul piano di tre punti non collineari, può incontrare uno solo dei tre segmenti racchiusi da questi punti. Dopo vari Teor., in uno dei quali stabilisce l'esistenza di un triangolo equilatero avente un dato segmento come lato, si presenta *la semiretta A per B* (o *raggio A verso B*), simboleggiata in |AB, come classe dei punti che stanno in |AB|, o nel *prolungamento* di |AB| oltre B — questo essendo la classe dei punti X per ognuno dei quali B giace in |AX|. Seguono varî teor. sulla semiretta, dai quali risulta infine che ogni retta è divisa da un suo punto qualsi-

Digitized by Google

voglia in due raggi aventi a comune quest'unico punto, che ne è l'origine comune.

Per *semipiano r per P,* simboleggiato in |rP, s'intende la classe dei punti Y, ognuno dei quali giace sul piano Pr in maniera, che la retta *r* non incontri il segmento |PY|, o lo incontri in Y. Una retta del piano divide questo in due semipiani che non hanno alcun punto comune fuor della retta. Nozioni analoghe si dànno circa il *semispazio,* ecc.

L'*angolo convesso (concavo)* dei raggi |AB e |AC, non è altro che la figura costituita da A, e da tutti quei punti X, diversi da A, ognuno dei quali è tale che |AX incontra il segmento |BC| (o non lo incontra fuor di B e C, pur giacendo sul piano ABC). Fra i teor. che seguono circa gli angoli piani, uno afferma qualmente l'angolo convesso (concavo) delle semirette |AB e |AC non dipende dai punti B e C, che possono scegliersi ad arbitrio sulle due semirette medesime. Sarebbe stato meglio premetterlo alla Def. suddetta.

Essendo A, B, C punti non collineari, e detta |A.BC| la figura occupata da tutti i segmenti che hanno un estremo in A e l'altro in |BC|, segue subito che |A.BC|=|C.AB|=|B.CA|, e di qui nasce il triangolo |ABC|. Ecc.

Nel § 4 s'introduce la *similitudine* come suol farsi per le collineazioni in Geometria Projettiva. Come una collineazione conserva gli allineamenti fra punti, così la similitudine ne conserva l'equidistanza, mutando qualunque terna *isoscele* in altra consimile. « Similitudine » = « trasformazione dei punti in punti, che a qualsivoglia coppia di punti equidistanti da un terzo coordina sempre una coppia di punti equidistanti dal trasformato del terzo ». Allo studio delle similitudini, che qui viene iniziato, si connettono alcuni teor. fondamentali circa le rotazioni e le simmetrie (*), uno dei quali — e cioè che « due sfere simmetriche ad una terza sono anche simmetriche fra loro » si appoggia al post. XXII: « Per tre punti non collineari passa almeno una sfera (e quindi anche un cerchio) », già proposto, come si sa, da W. Bolyai come principio equivalente al Post. di Euclide sulle parallele. Ma la distinzione fra le tre metriche si potrebbe ritardare, volendo, fino al § 6°, e in un modo assai semplice che l'A. suggerisce.

Di poi, con procedimento ben noto, da due punti dati A e $B \equiv d_0$ l'A. deduce successivamenle i punti $d_1 = A|B$, $d_2 = A|d_1$, $d_3 = A|d^2$, . . . , $d_i = A|d_{i-1}$; indi, posto $d_{1,0} \equiv A$ e $d_{i,1} \equiv d_{,1}$, anche

(*) Nelle ultime linee della dimostraz. di P11 (pag. 51) al posto di | BA e | B'A si deve leggere | AB e | AB'.

Digitized by Google

gli altri $d_{i,2} \equiv d_{i,0}/d_{i,1}$, $d_{i,3} \equiv d_{i,1}/d_{i,2}$, . . . , e in generale $d_{i,1} \equiv d_{i,1-2}/d_{i,1-1}$: che chiama per brevità punti *medio simmetrici* della coppia (AB) Inoltre, posto $A_0 \equiv A$ e $A^i = A_{i-2}/A_{i-1}$ con A_1 diverso da A, col Post. XXIII afferma che, per qualche valore *n* dell' indice *i*, bisognerà che il segmento $|A_{n-1}A_n|$ contenga un punto dato a piacere sul raggio $|A_0 A_1$. Questo è il noto Post. di ARCHIMEDE; per mezzo del quale si riesce a stabilire che fra due punti arbitrari di |AB deve sempre giacer qualche punto medio-simmetrico della coppia (A,B) (*). Allora, visto che una similitudine muta ciascun punto medio simmetrico $d_{i,1}$ nel punto analogo $d'_{i,1}$ della coppia (A',B') corrispondente a quella, si dimostra che qualsivoglia similitudine la quale possieda due punti tautologhi, deve rappresentare in sè stesso ogni punto della loro congiungente; e ne segue poi facilmente che una similitudine dotata di tre punti uniti non collineari è simmetria rispetto al piano di questi, o trasformazione identica; identità senz' altro, ove abbia più punti tautologhi non complanari. Qui (come spesso anche altrove) appar manifesto il proposito d' imitare, dove è possibile, il processo concettuale della Geom. di Posizione. E così l'A. perviene a stabilire, dopo alcuni Teor. sulle rotazioni, che qualsivoglia similitudine per cui sian tautologhi i punti di una stessa retta ed essi soltanto, è una rotazione.

Due coppie di punti (A,B) e (C,D) si diranno *congrue* fra loro, quando le sfere di B e D intorno ad A e C rispettivamente sono simmetriche rispetto al punto A|C, ovvero (ed è la stessa cosa) rispetto ad un asse o ad un piano perpendicolare in questo punto alla retta AC. Anche qui si verificano immediatamente le tre leggi riflessiva, conversiva e transitiva; indi si fa luogo al teorema che, se una similitudine ammette due coppie omologhe (di punti distinti) le quali siano congrue fra loro, la stessa cosa avverrà di due coppie omologhe quali si vogliano. Questa particolare similitudine (che ordinariamente si chiama *eguaglianza)* vien qui designata col nome di *isomeria;* riserbandosi l' altro più generale di « *eguaglianza* » per l' identità, o coincidenza, delle figure. Se ne dimostrano le proprietà fondamentali, come l' isomeria dei raggi, dei semipiani, degli angoli retti, e il teorema che un' isomeria qualsivoglia si può sempre scomporre nel prodotto di due o più *simmetrie.*

Il § 5 s' inizia col definire la relazione di « maggiore » e

(*) La penultima linea di questa dimostraz. (come l' A. stesso mi avverte) è da sostituirsi con la frase: « e — detto E l'equinverso di A_1 risp. ad A/C — anche |CE| è simmetrico di $|AA_1|$, e però son simmetrici l' uno dell'altro i segmenti $|A_{n-1}A_n$ e $|CE|$ ».

Digitized by Google

« minore » fra due segmenti, od angoli piani, della quale si confermano i caratteri essenziali. Seguono i notissimi teoremi sull' isomeria, o congruenza di due triangoli. Le dimostrazioni non differiscono sostanzialmente dalle ordinarie, che ricorrono alla *sovrapposizione;* ma questo termine ha qui un' accezione geometrica ben definita, diversa dall' ordinario significato meccanico; perchè afferma soltanto l' esistenza di una certa trasformazione (isomeria) dello spazio in sè stesso, per cui sono omologhe le due figure. E così diverse altre proposizioni del 1° libro di EUCLIDE ci si offrono con quel maggior grado di semplicità e correttezza ideale, che caratterizza la Geometria proiettiva Staudtiana.

Nel § 6 tratta del parallelismo fra rette o piani svolgendone tutta quanta la teoria, che s' impernia principalmente sul Post. XIII. Di qui si accede al teor. di DESARGUES (sui triangoli omotetici); indi vien definita geneticamente l' omotetia come quella trasformazione univoca dello spazio in sè stesso, che nasce applicando la nota costruzione lineare. Se ne studiano alcune proprietà, per poi dimostrare in ultimo che ogni similitudine equivale al prodotto di un' isomeria per un' omotetia, e trasforma un angolo dato qualunque in un altro ad esso congruente. Così, mediante le lor costruzioni effettive, si definiscon la *traslazione,* e l' *antinversione* rispetto ad una sfera: da cui si può passar tosto all' *inversione (positiva)* con l' aggiunta di una simmetria rispetto al centro della sfera. Nei teoremi successivi si stabiliscono sommariamente le proprietà fondamentali dell' antiversione (e quindi anche implicitamente dell'inversione positiva, delle polarità ed antipolarità rispetto a cerchi o sfere), mediante semplici considerazioni stereometriche, indipendenti dalla teoria delle proporzioni e dell' equivalenza.

Nel § 7, dedicato allo studio e alla classificazione delle isomerie, s' introducono l' *antirotazione,* o prodotto di una rotazione per uno specchiamento in un piano perpendicolare all'asse (dimostrandosi che qualunque isomeria che possieda un sol punto unito è un' antirotazione); poi l' *antitraslazione,* o prodotto d'una traslazione per lo specchiamento in un piano ad essa parallelo, e l' *elicomozione,* o prodotto d' una rotazione per una traslazione parallela all' asse di questa; e si viene alla conclusione che la identità, lo specchiamento, la rotazione, l'antirotazione, la traslazione, l'antitraslazione e l'elicomozione, abbracciano tutte quante le isomerie possibili. Di poi chiamata *congruenza* (o *moto)* ogni isomeria che equivalga al prodotto di un' isomeria per sè stessa, e *anticongruenza* ogni altra isomeria, si deduce dai teor. precedenti che son congruenze l'identità, la rotazione, la trasla-

Digitized by Google

zione e l'elicomozione, anticongruenze lo specchiamento, l'antirotazione e l'antitraslazione. Seguono alcuni teor. circa il prodotto di congruenze e di anticongruenze, ad es. che il prodotto di due congruenze, o di due anticongruenze, è sempre una congruenza; ecc. Anche a prescindere dalla novità dei nomi proposti e dal criterio di separazione fra le eguaglianze di 1ª e di 2ª specie (congruenze e anticongruenze) — che le avvicina in certo modo alle quantità positive e negative dell'Algebra — il presente capitolo sviluppa adeguatamente una parte di Geom. Elem. per lo più trascurata o imperfettamente trattata, persino dai migliori Autori.

Nel § 8 con una ingegnosa Def. della frase « *seguente X nel senso* A→B (o da A verso B) » essendo A,B,X punti collineari — frase simboleggiata in $\sigma_{A,B}X$ — vengono attribuiti alla retta AB i due sensi opposti $\sigma_{A,B}$ e $\sigma_{B,A}$; e mediante considerazioni analoghe (quantunque un po' meno semplici) si fa luogo ai due sensi non proiettivi del cerchio, o del fascio di semirette. Appresso, dopo avere accennato alla *progressione* di punti (secondo G. Cantor), al limite superiore (inferiore) di una progressione ascendente (discendente), e notati alcuni fatti circa le progressioni di punti mediosimmetrici $d_{i,1}$ (§ 4), si definisce l'*ascissa* di un qualsivoglia punto X di AB rispetto ad A come *origine* e a B come *punto unità*. La distanza di Y da X, rispetto ad *u* (X, Y essendo punti distinti, e *u* un segmento prestabilito a piacere) viene ad esser l'ascissa di Y rispetto ai punti X ed U, dove U (punto unità) sia quel punto del raggio |XY, per cui risultano congrui i segmenti |XU| ed *u*. E su questa nozione (indipendente dal trasporto arbitrario di unità mobili a piacere) si stabilisce il teorema di Talete.

Dai Post. I-XXIII è possibile svolgere tutta quanta l'ordinaria Geom. Elem.: la quale (come già si sapeva per le note ricerche di Veronese e di Hilbert) è indipendente dalla *continuità* della retta nel senso di G. Cantor, Dedekind, Weber. Ma affinchè esistano punti, la cui distanza da un punto dato secondo una data unità di misura, eguagli un numero prestabilito a piacere, è necessario ammettere un altro post. L'A. stabilisce il seguente: « Sempre che A e B siano punti, A diverso da B, qualsivoglia progressione d_{i_0,i_0}, $_{i_1,i_1}$., $d_{i_2,i_2},\ldots$, $d_{i_r,i_n},\ldots$ discendente rispetto al senso A→B, che si possa istituir nella classe dei punti medio simmetrici di A,B verso A, possiede sempre un limite inferiore ».

G. Marletta.

Digitized by Google

Geometria analitica.

C. Runge. *Analytische Geometrie der Ebene.* Mit 75 Figuren im Text. Leipzig unp Berlin 1908. 8° gr. p. 198. (Prezzo del vol. leg. Mk. 6).

Indice.

Parte I. — Equazioni della retta e del cerchio. — 1. Concetto di vettore. 2. Coordinate di un punto. 3. Addizione di vettori. 4. Formazione della retta. 5. Prodotto ed esterno di due vettori. 6. Prodotto interno. 7. Calcolo della direzione e della lunghezza d' un vettore; equazione del cerchio.

Parte II. — Costruzioni con retta e circolo. — 8. Condurre una retta per due punti. 9. Costruzioni con la retta. 10. Risultante di forze. 11. Calcolo delle tensioni in un sistema articolato. 12. Intersezioni di una retta con un cerchio. 13. Intersezioni di circoli. 14. Problema di Pothenot.

Parte III. — Trasformazione lineare delle coordinate. — 15. Rotazione di figure piane. 16. Trasformazione per similitudine delle figure piane. 18. L'ellisse come figura affine del cerchio. 18. Costruzione degli assi d' un' ellisse. 20. Equazione d' un' elisse riferita ad una coppia di diametri conjugati. 21. Trasformazione generale per affinità di un cerchio. 22. La « tosatura » d' un cerchio (1). 23. Intersezione di una retta con una ellisse. 24. Polo e polare. 25. Polo e polare nel cerchio. 26. Involuzione su di una retta. 27. Trasformazione prospettiva di figura piana. 28. L'iperbola come figura prospettiva del cerchio. 29. La parabola come prospettiva del cerchio. 30. Le coniche. 31. Trasformazione affine in generale. 32. Trasformazione prospettiva in generale. 33. Rete prospettiva di coordinate. 34. Equazione generale delle coniche. 35. Applicazione della teoria generale delle coniche. 36. Proprietà focali delle coniche.

Parte IV. — Coordinate omogenee. — 37. Coordinate di punti e coordinate di rette. 38. La punteggiata. 39. Equazione della retta all' infinito. 40. Il fascio di raggi. 41. Interpretazione meccanica delle coordinate omogenee. 42. Rappresentazione prospettiva di un piano sopra un altro. 43. Equazione di secondo grado fra le coordinate omogenee. 44. Punti immaginari.

Prefazione dell'Autore. — « La presente operetta è il pro-

(1) Tale nome viene dall'A. dato alla trasformazione definita dalle formole:

$$x' = x + ay, y' = y.$$

Digitized by Google

dotto delle lezioni da me tenute per molti anni nel Politecnico di Hannover e nel redigerle mi sono ispirato in prima linea ai bisogni dei tecnici. A me sembra che la geometria analitica, come s' insegna nei politecnici, deve anzitutto somministrare gli strumenti con cui le relazioni geometriche si possono scoprire col sussidio del calcolo. Perciò nell' insegnamento ho insistito a far vedere come mediante le coordinate si possano istituire i calcoli relativi alle costruzioni che si eseguono sopra la carta mediante riga e compasso e come nei vari problemi i calcoli siano da condurre nel modo più conveniente. Tale soggetto è trattato nella II Parte dell'opera presente, dopo che nella I vennero esposti il concetto di vettore e fatte conoscere le equazioni della retta e del cerchio. La III Parte tratta delle trasformazioni lineari delle coordinate o, per dirla geometricamente, le traslazioni e le rotazioni delle figure, la trasformazione per similitudine, le trasformazioni affini e finalmente la trasformazione prospettiva. Col mezzo di tali trasformazioni dal cerchio nascono le coniche e lo studio delle trasformazioni lineari abilita a dedurre le proprietà fondamentali delle coniche da quelle del cerchio. La IV Parte tratta le coordinate omogenee epperò va al di là dei bisogni dei pratici; ma il punto di vista elevato, che si consegue coll' uso delle coordinate omogenee, permette di vedere le cose con così grande semplicità che la fatica spesa è largamente compensata ».

W. Dette. — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte.* Mit 45 Textfiguren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909. 8° IV+882 (Prezzo Mk. 4,40).

Al leggere il titolo di questo nuovo libro molti lettori ripeteranno con L. Sterne « dobbiamo noi continuare sempre a fare dei nuovi libri col sistema usato dai farmacisti per comporre le loro miscele, cioè versando sempre le stesse materie da un vaso in in un altro? »; ed in realtà, riflettendo alle innumerevoli trattazioni che furono fatte della teoria delle sezioni coniche, a partire dall'epoca di Apollonio alla fine del secolo XIX, vien fatto di chiedersi che cosa si può dir di nuovo sull' argomento! Tuttavia il volume che oggi annunziamo è differente da quelli che lo precedettero; esso, più che intenti scientifici, si prefigge scopi didattici, onde piuttosto che agli scienziati si rivolge agli studenti, giacchè contiene piuttosto definizioni, problemi e conseguenze che teorie; e le numerosissime questioni risolte di cui è cosparso lo fanno raccomandabile a coloro che cercano enunciati di questioni da proporsi agli allievi. La natura dell'opera

Digitized by Google

non consente più di un annuncio, seguito dall'enumerazione delle materie trattate (I. *Il punto.* II. *La retta.* III. *L'ellisse.* IV. *La parabola.* V. *L'iperbola.* VI. *Determinazione di una conica col mezzo di punti e tangenti);* soltanto notiamo che l'equazione del cerchio precede quella della retta, sistema questo che l'A. suggerisce in base a considerazioni intrinseche sulla difficoltà relativa della deduzione, ma che si potrebbe confortare anche con argomenti d'indole storica.

G. L.

Geometria differenziale.

Luigi Bianchi. — *Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* (T. 34 des Mèmoires des Savants étrangers; Paris 1909).

— — *Lezioni di geometria differenziale* (vol. III) *(Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche).* — (Pisa; Spoerri 1909). (*).

Riassumeremo qui i nuovi risultati, e le nuove teorie, di cui il Prof. L. Bianchi ha recentemente arricchito la Geometria Infinitesimale, e che egli ha esposto nella memoria e nel libro qui sopra citati.

La memoria fu recentemente premiata dall'Accademia Francese delle Scienze insieme a un lavoro del Guichard sullo stesso argomento; il libro si può considerare come il terzo volume delle oramai classiche *Lezioni di Geometria differenziale* del Prof. L. Bianchi, i primi due volumi delle quali ebbero già una recensione del Dott. Rimini in questo stesso *Bollettino* (v. T. VII 1904, p. 39-48). Grandi furono le difficoltà, che presentarono le ricerche di cui ora ci occuperemo, e quasi insormontabili per via analitica; ma le geniali intuizioni geometriche del Prof. Bianchi vinsero, come vedremo, successivamente i varii ostacoli, e costruirono una teoria che sarà forse il primo passo a una nuova e più generale teoria delle trasformazioni delle equazioni alle derivate parziali.

Noi ci riferiremo più al libro (V) che alla memoria (M); l'esposizione data in (V) ricevette dall'A. notevoli perfezionamenti. Debbo però ricordare che in (M) (pag. 7-20) è contenuto un *aperçu de la theorie des transformations*, che riassume nel

(*) Citeremo la memoria con (M); il libro con (V).

Digitized by Google

modo più chiaro e preciso i risultati fondamentali ottenuti, e indica quali sono i complementi che si dovrebbero attendere da un ulteriore sviluppo della teoria.

Per comodità del lettore nel seguente paradigma porremo nella riga superiore i numeri dei paragrafi di (M); e nella riga inferiore i numeri dei corrispondenti paragrafi di (V).

(M)	1	2	3,4,....,11	12...19	20	21-27	28	29	30-34	35-41	42
(V)	3	5	6,7,...·,14	16.,.22	24	55-61	54	2	25-29	32-38	65

(M)	43-50	51,--	52	53-56	57	58	59	60 —	61,—	62-66	67-71
(V)	41-48	68,71	73	75-78	79	90	80	82,83	83,85	86-89	49-53

Riassumeremo anzitutto l' introduzione storica preposta dall'A. a (M). Dopo la *trasformazione complementare* delle superficie pseudosferiche, scoperta dall'A. nel 1879, che diede origine a importanti studii di S. Lie, si ebbe la generalizzazione ottenutane dal Bäcklund nel 1883. Il massimo progresso nella teoria di queste trasformazioni è dovuto al Prof. Bianchi, che nel 1892 scoperse il teorema di permutabilità, che riduce la successiva e indefinita applicazione delle precedenti trasformazioni alla integrazione di *una sola equazione di Riccati, e a puri calcoli algebrici senza quadrature.*

A partire dal 1897 il Guichard con ricerche iperspaziali trovò delle trasformazioni per le superficie isoterme, e per le superficie applicabili sulle quadriche. Di queste trasformazioni manca finora una esposizione precisa; nè se ne è riconosciuta la natura geometrica. Ma sono importantissimi tra gli altri i teoremi del Guichard per le deformate delle quadriche di rivoluzione, che servono al Prof. Bianchi come punto di partenza per la teoria delle trasformazioni delle deformate delle quadriche. Intanto il Darboux trovava una trasformazione delle superficie isoterme, e una relazione tra certe superficie isoterme (che il Bianchi chiama *speciali)* e le deformate delle quadriche generali. Il Bianchi, dimostrato che per queste trasformazioni vale pure un teorema di permutabilità, che porta ad esse le stesse semplificazioni che l' ordinario teorema di permutabilità porta alla teoria delle trasformazioni di Bäcklund, ne deduce un metodo di trasformazione per le superficie applicabili sulle quadriche generali.

Queste trasformazioni però (nel caso delle superficie a curvatura media costante) si riconoscono prodotto di due trasformazioni *elementari.* Donde la ricerca generale di queste trasformazioni *elementari.* Le difficoltà furono vinte con l' idea geniale di

Digitized by Google

realizzare queste trasformazioni elementari col passaggio dall' una all' altra falda focale di particolari congruenze rettilinee W. E dallo studio preliminare (1905-06) delle quadriche di rivoluzione, o dei paraboloidi il BIANCHI passò ben presto (1906-07) allo studio delle quadriche generali. I risultati più importanti di questo studio saranno qui riassunti.

Come indica però l'A. stesso, vi sono delle superficie *reali*, applicabili su quadriche reali o immaginarie (p. es. le superficie applicabili sulla sfera), per cui le trasformazioni elementari trovate sono immaginarie; sarebbe une studio utile l'esaminare col sussidio del teorema di permutabilità quelle trasformazioni *reali* di tali superficie, che si ottengono per composizione di trasformazioni elementari immaginarie. Altri utili complementi alla teoria sarebbero tra gli altri secondo l' A.:

1.° la decomposizione effettiva delle trasformazioni di DARBOUX per le superficie isoterme speciali in due trasformazioni elementari.

2.° l' esame delle classi di superficie rigate, a cui si possono estendere tali trasformazioni.

3.° lo studio di tutte le congruenze rettilinee W, le cui falde focali sono applicabili su quadriche *distinte*.

Il libro (V) contiene sette capitoli e due note. Il primo capitolo è dedicato alle quadriche rigate. Dopo una breve introduzione (§ 1) si hanno due paragrafi (§§ 2-3) dedicati ad alcune ricerche preliminari: la dimostrazione geometrica (§ 2) di un teorema del CHIEFFI (*), e la risoluzione (§ 3) del seguente problema: Data una superficie S, si tiri per ogni punto F di S un segmento $F F_1$ tangente a S. Se S si deforma trasportando invariabilmente connessi questi segmenti, quando avverrà che la superficie luogo dei punti F_1 è la seconda falda focale della congruenza delle rette $F F_1$? (**). Al § 4 si enuncia il teorema fondamentale. Siano R, R' due rigate applicabili per deformazione continua; noi diremo che R' *rotola* su R quendo assume successivamente le ∞^1 posizioni, in ciascuna delle quali R, R' sono tangenti lungo due corrispondenti generatrici (***).

(*) Eccone l' enunciato. Se a è una assintotica di una superficie S, applicabile su una rigata R, e dai punti di a tiriamo le tangenti alle geodetiche di S deformate delle generatrici di R, otteniamo una rigata R_1 applicabile su S; nell' applicazione di S su R la assintotica a rimane rigida.

(**) In (M) (§ 1) si aggiunge l' osservazione che ciò avviene o per nessuna, o per una, o per due, o per ∞^1, o per tutte le deformate di S.

(***) Che ciò sia possibile per ogni coppia di superficie rigate applicabili segue subito dal teorema di Chasles (*Lezioni ecc.* vol. I; § 118, pag. 259-260).

Digitized by Google

Sia ora R applicabile su una quadrica rigata Q; e alle generatici di R. corrispondano per deformazione continua p. es. le generatrici del 1.° sistema di Q. Se Q rotola su R, trascinando invariabilmente connessa una quadrica confocale Q', le generatrici del 1.° e del 2.° sistema di Q' genereranno rispettivamente due congruenze Γ, $\overline{\Gamma}$. Sia R_1 una rigata di Γ o di $\overline{\Gamma}$, che da ogni posizione di Q' prende una generatrice, siano r, r_1 due generatrici corrispondenti qualsiasi di R, R_1. A ogni punto F di R facciamo corrispondere quel punto F^1 di R_1 in cui r_1 incontra il piano tangente in F alla R. Le rigate R, R_1 sono così poste in corrispondenza biunivoca. Il teorema fondamentale è il seguente: *Ciascuna delle congruenze* Γ, $\overline{\Gamma}$ *si può in uno e in un sol modo decomporre in* ∞^1 *rigate* R_1, *così che:*

a) *Ogni rigata* R_1 *forma con* R *le due falde focali di una congruenza* W *generata dalle rette* F F_1 *congiungenti due punti corrispondenti.*

b) *Le rigate* R_1 *sono applicabili su* Q *e quindi anche su* R; *anzi* R_1 *è applicabile su* R *con deformazione continua* (*).

Da una superficie R (al variare di Q' e al variare di R^1 in Γ o in $\overline{\Gamma}$) otteniamo due sistemi di ∞^2 superficie trasformate R_1. Una di queste è determinata quando sia scelto uno dei sistemi di generatrici, e sia dato (ad arbitrio) un segmento focale iniziale F F_1.

Nei §§ 5-15 si dimostra questo teorema, supponendo Q essere un paraboloide iperbolico P_0; e nel corso della trattazione si trovano nuovi importanti rapporti geometrici. Premesse nel § 5 alcune formole preliminari, indicato con P_k un paraboloide iperbolico confocale a P_0 (**) (che sarebbe nel caso attuale la quadrica Q' del teorema generale), supposto per fissare le idee che le generatrici di R sieno le linee coordinate v = cost., si dimostra:

1.°) La seconda forma fondamentale di R contiene una funzione arbitraria φ (v).

2.°) Si determina una qualsiasi rigata R_1 di Γ o di $\overline{\Gamma}$, dando una funzione μ (v) arbitraria di v (μ è il parametro di una generatrice di P_k).

(*) Questo teorema vale anche se Q' si riduce a una conica focale; in tal caso Γ e $\overline{\Gamma}$ coincidono con la congruenza generata dalle tangenti a questa conica.

(**) Le quadriche confocali a una quadrica data formano una schiera; esse perciò dipendono birazionalmente da un parametro, che l'A. indica con k, e che si può supporre nullo per la quadrica P_0. Da ciò le notazioni del testo.

Digitized by Google

Tutto adunque è ridotto, dato ad arbitro $\varphi(v)$, a determinare $\mu(v)$ in guisa che la rigata R_1 corrispondente soddisfi alle condizioni imposte dal precedente teorema. Si comincia con l'esprimere la condizione che R, R_1 formino le falde focali di una stessa congruenza. Dai risultati del § 3 si deduce nei §§ 6-7 che $\mu(v)$ soddisfa in tal caso un'equazione di Raccati. Resta così dimostrato che Γ o $\bar{\Gamma}$ si possono in uno e in un sol modo decomporre in ∞^1 rigate R_1, che con R formano le falde focali delle congruenze di rette $F F_1$. Si deve ora verificare che le R_1 godono di tutte le altre proprietà enunciate dal teorema fondamentale.

Nel § 8 si verifica intanto facilmente che *su* R, R_1 *si corrispondono le assintotiche (ossia che la congruenza delle* $F F_1$ è W). E si osserva che nel piano tangente a R in un punto qualsiasi F vi è una conica C intersezione di detto piano con la posizione assunta da P_k quando P_0 nel suo rotolamento diventa tangente a R lungo la generatrice passante per F. Fissato k, sono fissate tutte queste coniche C; il fatto che l'equazione per $\varphi(v)$ è un'equazione di Riccati dimostra che 4 *superficie* R_1 *corrispondenti a uno stesso valore di* k, o, come si suol dire, *trasformate di* R *mediante una* B_k, *determinano su tutte le coniche* C *un gruppo di quattro punti di birapporto costante.*

Dopo aver nel § 9 esaminati i casi che P_k coincida con P_0, o con una conica focale, si determina nel § 10 l'elemento lineare delle rigate R_1. I §§ 10-11 sono dedicati a completare la dimostrazione del teorema fondamentale: a provare cioè che le rigate R_1 sono applicabili su R. Le difficoltà insormontabili da una trattazione diretta, vengono vinte dal Prof. Bianchi con la più geniale intuizione geometrica, che conduce a uno dei risultati più notevoli della ricerca. Egli prevede (e i §§ 11-12 sono destinati a verificare la previsione) *quale è la legge di applicabilità delle* R, R_1. La legge è la seguente: *Siano* F, F_1 *due punti corrispondenti di* R, R_1. *Distendendo* R *su* P_0, *il segmento* $F F_1$, *trasportato nella deformazione, diventerà un segmento* $M_0 \bar{M}_0$ *terminato a* P_0, P_k. *Il punto* M_1 *di* P_0 *che corrisponde al punto* F_1 *di* R_1 *per la applicabilità di* R_1 *su* P_0, *è il punto* M_1 *trasformato di* $\bar{M}_0$ *nella affinità di Ivory tra le due quadriche* P_0, P_k (confocali) (*).

Nei §§ 13-14 da alcune proprietà dell'affinità di Ivory si

(*) Fra i punti di due quadriche confocali vi è la corrispondenza determinata dalle traiettorie ortogonali della schiera, cui appartengono. Questa corrispondenza è anzi una *affinità*, che si chiama di *Ivory* dal nome del geometra, che la considerò per primo.

Digitized by Google

deduce che, *se* R_1 *proviene da* R *per una delle precedenti trasformazioni* B_k, *viceversa* R *proviene da* R_1 *per la medesima trasformazione* B_k.

Nel § 15, oltre ad alcune formole relative alle posizioni relative di due punti F, F_1 e dei relativi piani tangenti, si fa questa interessante osservazione che, se P_o si deforma nella rigata R, trascinando invariabilmente connesse le coniche C intersezione dei suoi piani tangenti con B_k, e i coni A circoscritti a P_k dai punti di P_o, *allora la tripla infinità di punti e di piani tangenti delle* ∞^1 *superficie trasformate* R_1 *è data dai punti di queste coniche, e dai piani tangenti a questi coni.*

I §§ 16-23 estendono queste ricerche all'iperboloide ad una falda Q_o. Il § 24 è dedicato al caso particolare che Q_o sia di rotazione, e che l'iperboloide confocale Q_k si riduca all'asse di rotazione; nel qual caso la trasformazione B_k corrispondente si riduce alla trasformazione complementare. Altre considerazioni si aggiungono per le relazioni tra le attuali trasformazioni, e le trasformazioni già note delle curve di Bertrand.

Il Cap. II tratta delle trasformazioni B_k per le deformate generali delle quadriche rigate Q. Sia Q_k una quadrica omofocale di Q. Il piano tangente a Q in un suo punto generico F incontri Q_k in una conica C. Sia F_1 un punto di C e π_1 sia il piano passante per F F_1 e per quella generatrice di Q_k che passa per F_1 e che appartiene a uno dei due sistemi di generatrici (scelto una volta per sempre); sia S una *qualsiasi* deformata di Q; e supponiamo che Q si deformi nella S seco trascinando invariabilmente connesse le coniche C coi punti F_1 e i piani π_1. Il teorema da dimostrare (§ 25) è il seguente:

Si può determinare in ∞_1 *modi su ogni conica* C *il punto* F_1 *in guisa che la superficie* S_1 *luogo dei punti* F_1

1.°) *sia applicabile su* S *(e quindi su* Q) *e la legge di applicabilità sia data dall'affinità d'Ivory tra le quadriche* Q, Q_k.

2.°) *abbia in* F_1 *per piano tangente il piano* π_1 *corrispondente; e infine la congruenza delle rette* F F_1 *sia* W *e abbia naturalmente le* S, S_1 *come falde focali.*

Nei §§ 26-28 si dimostra nel caso che Q sia un paraboloide che la determinazione di F_1 in guisa che sia soddisfatta la prima delle precedenti condizioni richiede l'integrazione di un'equazione di Riccati illimitatamente integrabile e nei §§ 30-32 si dimostra che la seconda condizione è conseguenza della prima.

Le ∞^1 superficie S_1 così ottenute si dicono ottenute dalla S con una trasformazione B_k (e si dividono in due categorie corrispondenti ai due sistemi di generatrici di Q_k). *Quattro*

Digitized by Google

delle superficie S_1 *determinano sulle coniche* C *gruppi di 4 punti a birapporto costante.* Se *a* è un' assintotica di S, e se S_1 è quella superficie trasformata che viene determinata da un segmento $F F^1$ uscente da un punto F di *a* e posto nel piano osculatore in F alla *a,* allora, *se* S *si deforma attorno all'assintotica* a, *che rimane rigida, la curva* a_1 *assintotica di* S_1 *corrispondente rimane fissa nello spazio ed* S_1 *si deforma attorno alla* a_1. *Le rigate* R, R_1 *circoscritte alle* S, S_1 *secondo il teorema di Chieffi lungo le* a, a_1 *sono ancora trasformate l'una dell'altra mediante una* B_k.

Se S_1 *proviene da* S *mediante una* B_k. *anche* S *proviene da* S_1 *mediante una* B_k.

Se S *è rigata. anche* S_1 *è rigata, e le attuali trasformazioni si riducono a quelle del 1° Capitolo.*

Si dice *sistema coniugato permanente su* S *quel sistema* di linee a cui su Q corrisponde ancora un sistema coniugato. Nel § 34 si dimostra che su S, S_1 si corrispondono i sistemi coniugati permanenti

I §§ 35-38 estendono questi risultati all'iperboloide rigato.

(continua) G. Fubini.

Geometria della retta.

R. Weitzenbock - *Komplex-symbolik.* Sammlung Schubert LVIII. Leipzig, Goeschen 1905, 8° p. VI+191 (Prezzo Mk. 4.80).

Quest'opera è consacrata ad un'esposizione, col mezzo della notazione simbolica, delle proprietà dei complessi lineari in spazi a tre, quattro e cinque dimensioni, con un' introduzione alla corrispondente teoria per *n* dimensioni.

L'A. comincia con una breve esposizione di alcuni teoremi e concetti fondamentali del metodo simbolico. La relativa trattazione è assai concisa ed ha unicamente per iscopo di porre in grado il lettore di tener dietro alla discussione esposta poi; coloro che desiderano nozioni esaurienti su quel metodo devono ricorrere ad altre fonti. Nelle seguenti sessanta pagine sono dimostrati col metodo simbolico molti dei noti e più importanti teoremi relativi ai complessi lineari e quadratici dello spazio ordinario, la materia essendo quale può naturalmente attendersi in un breve primo corso sull'argomento.

Arriviamo ora alla parte più importante dell'opera in questione, quella che tratta anzitutto del complesso lineare di rette e della figura duale nello spazio a quattro dimensioni, poi dei complessi di rette, di piani e di spazi ordinari nello spazio a cinque dimensioni, a cui poi segue una breve introduzione alla

Digitized by Google

teoria dei complessi di rette nello spazio a n dimensioni. La relativa discussione, non essendo esauriente, è suggestiva e stimolatrice ad ulteriori ricerche. Va notata espressamente l'eleganza e la concisione della parte analitica.

Un grave difetto del volume in discorso sta nell'assensa quasi totale di citazioni. Inoltre esso sarebbe riuscito più facile e più chiaro ove i principali teoremi fossero stati presentati in modo più perspicuo.

L' ultimo capitolo — che realmente è un' Appendice all' opera, differendo dal resto del libro nel metodo e nel tema — ha per iscopo di provare che « coll' impiego del metodo simbolico nella geometria analitica di posizione si consegue la trattazione più semplice ed elegante del soggetto, giacchè, in un certo senso, così facendo si opera proprio sopra gli stessi enti geometrici ». Tuttavia non si può dire che, con la discussione esposta dall'A., si raggiunga realmente siffatta conclusione, non essendo dimostrato che non esistano altri metodi di eguale o maggiore semplicità, che guidino al medesimo scopo.

G. H. Sisam.

Geometria descrittiva.

O. Richter. — *Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Uterricht und zum Selbststudium.* Mit 147 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908. 8° p. X+ 187 (Prezzo Mk. 4.40; leg. Mk. 4.80.

Estratto della Prefazione.

« Quest' opera vuol essere un complemento ai manuali e ai trattati di geometria descrittiva; essa si propone di risolvere rigorosamente certi problemi che si sogliono trattare quà e là, o per posizioni speciali delle figure rappresentate, o solo « schematicamente », benchè la loro origine sia nell' insegnamento della stereometria. Lo stimolo alla pubblicazione di essa fu data dalla bella *Geometria descrittiva* per studenti di R. Sturm (Leipzig, Teubner 1900], ove (pag. 141-142) si legge: « Per la costruzione in projezione di triangoli sferici è importante risolvere il seguente problema. A', B' siano due punti interni al contorno apparente V' di una sfera, considerati come proiezioni di due punti della sfera; determinare esattamente l'ellisse in cui si projetta il circolo massimo passante per questi due punti. Ma la soluzione di questo problema presuppone cognizioni che oltrepassano i limiti di questo libro, onde ci è impossibile svolgerlo completamente »... Or io penso che gli studenti

Digitized by Google

delle scuole medie, a cagione dei rapporti fra il tema de me trattato e l' insegnamento elementare, abbiano il diritto di venire istruiti in siffatte cose (cfr. le osservazioni in *Zeitschrift für den mathem. und Naturw. Unterricht*, T. XXIX, p. 92 e 329) e che l' insegnamento della geometria descrittiva, sino ad un certo punto, deve essere oggetto della stereometria elementare. Per impadronirsene è solo necessario di conoscere la planimetria e la stereometria sino ai teoremi sopra i poli e le polari rispetto ad un cerchio inclusivamente, perchè io, pei lettori che non conoscono gran che di coniche, espongo della teoria dell' ellisse soltanto quello che è necessario. Naturalmente un altro scopo di tale esposizione delle proprietà dell' ellisse è l' adunare tutto il materiale necessario allo scopo; in conseguenza io mi lasciai guidare, non dall' unità di metodo, ma, all' infuori della facilità, dal desiderio di stabilir il massimo numero di relazioni concernenti la proiezione della sfera e del cerchio, scopo principale del libro. Ma viceversa l' insegnamento della stereometria in parecchi casi può condurre direttamente alla rappresentazione delle relative figure; per ciò l' intelligenza di questo libro è indipendente dalle cognizioni intorno alla doppia proiezione e ciò anche in vista del fatto che molti Licei mancano oggi ancora di un corso speciale di geometria descrittiva. Ora nell' insegnamento della stereometria raramente si può evitare l' uso di figure in prospettiva; ma se si usa una figura siffatta — sia che la si mostri bell' e tracciata, sia che la si disegni sotto gli occhi degli alunni o che la si faccia delineare dagli studenti — deve venire concepita matematicamente esatta od almeno esente da errori grossolani. In generale nella trattazione dei problemi vennero esposte altre relazioni, nonchè riprove ed artifici da usarsi quando si tratti di punti d'intersezione determinati inesattamente o inaccessibili. Dal materiale da me accumulato in un ventennio io ho trascelto una piccola parte, evitando di regola i problemi che guidano ad iperboli e curve superiori (eccezione fatta per la cicloide sferica § 12, il toro e l' elica cilindrica § 16), per mantenermi in un campo limitato di problemi stereometrici scolastici.

Mi sono sforzato di stabilire geometricamente le proposizioni e le soluzioni ogniqualvolta si trattava di porre in luce delle mutue dipendenze che il calcolo avrebbe oscurato. Tale è ad es. la relazione naturale tra il « triedro » di Steiner ed il triangolo di Weisbach, la sezione del toro con un piano bitangente, la deduzione delle proprietà del dodecaedro e dell' icosaedro dalla sezione aurea, e la conseguente rappresentazione diretta di tali corpi regolari in posizione arbitraria, della inter-

Digitized by Google

sezione di questi corpi regolari e la riproduzione dei più semplici fra i solidi semiregolari; giacchè ad es. la delineazione di quell' intersezione riesce di concepimento più difficile o meno chiara supponendo i dati poliedri in posizione speciale rispetto al quadro.

L' ordinamento non è puramente sistematico nè puramente metodico, ma fra problemi aventi fra loro un' interdipendenza sistematica si trovano gruppi minori ordinati metodicamente. Il principiante non sarà certo in grado di risolvere alcune delle questioni semplicemente enunciate, ma mi era impossibile esporre tutto diffusamente senza oltrepassare di troppo i limiti prefissati di quest' opera. Indicazioni occasionali intorno al modo di risolvere alcune di tali questioni, alcune delle quali danno dei risultati estremamente attraenti, nonchè materia per altri esercizi, si troveranno nell'originalissima *Stereometria* dell'Holzmüller. Oltre ai noti trattati completi di Geometria descrittiva, citerò il *Lehrbuch der niederen Sphärik* di Cristoforo Gudermann (Münster, 1835), la *Genetische Stereometrie* di Heinze-Lücke (Teubuer, 1886) ed il *Lehrbuch der Stereometrie* di Kommerell-Hauck (Tübingen 1905). Mi sia lecito raccomandare in particolare le applicazioni alla rappresentazione esatta di apparecchi di fisica e chimica . . . »

Indice.

PARTE. I. — L' *ellisse.* — 1. L'ellisse come sezione del cilindro circolare retto. 2. Tangenti all'ellisse. 3. Diametri coniugati. 4. Generazione cinematica dell'ellisse; costruzione degli assi mediante una coppia di diametri coniugati. 6. Problema fondamentale delle teorie della proiezione ortogonale d' una sfera.

PARTE II. — *Proiezione ortogonale della sfera.* — Preliminari. 7. Diametri e circoli massimi della sfera. 8. Costruzione delle immagini di circoli e poli. 9. Assonometria ortogonale. 10. Costruzione delle immagini di circoli minori. 11. Problemi fondamentali sulla sfera. 12. Altri problemi.

PARTE III. — *Applicazioni.* — 13. Prisma, piramide, cilindro, cono, porzioni di sfera. 14. Angolo triedro e triangolo sferico. 15. Il triedro trirettangolo; poliedri di Platone ed Archimede. 16. Solidi di rotazione; spirali. 19. Figure geografiche ed astronomiche.

Probabilità.

E. CZUBER. — *Wahrscheinlichkeitsrechnung uud ihre Anwendung auf Fehlerausgleicheung, Statistik und Lebensversicherung.* I

Digitized by Google

Band, Mit 18 figuren im Text, Leipzig u. Berlin, Teubner, 1908, 8° pag. X 410 (Prezzo del vol. Mk. 14).

Il comparire d'una seconda edizione del bel libro di CZUBER, del quale discorremmo a due riprese in questo *Bollettino* (1903 e 1904) ci reca viva soddisfazione, sia perchè vediamo resa giustizia ad un'opera di vero merito, sia perchè ne rileviamo come questo argomento, tanto interessante, delle prababilità abbia larga schiera di cultori e di ammiratori.

La parte, diremo così, tecnica e formale dell' opera non è sostanzialmente mutata dalla 1.ª edizione, in questa *prima parte* che tratta dei principî e metodi generali, della probabilità geometrica, di quelle dei risultati di prove ripetute, della determinazione sperimentale delle probabilità, della teoria dei vantaggi e dei rischi aleatorî, della teoria degli errori d'osservazione.

A queste trattazioni, corredate, come nella 1.ª edizione, di numerosi esempi, è aggiunto quì, un capitolo nuovo, ispirato nella sostanza alle idee di FECHNER, di BRUNS e di LIPPS sulla teoria delle *misure colletive.*

Ciò che sopratutto distingue la solerte fatica dell'Autore in questa nuova edizione, si è la più diffusa e più profonda discussione dei principî filosofici, sia nello stabilire i concetti fondamentali (I Abschn § 1) sia nella trattazione della probabilità relativa (§ 3) sia in quella della probabilità geometrica (§ 4).

Riguardo a quest' ultimo argomento, in particolare, l'A. molto accuratamente stabilisce i principî per l' apprezzamento delle probabilità in quei problemi nei quali i casi possibili e i favorevoli costituiscono un *continuo* e non siano quindi valutabili colla ordinaria numerazione. L'A. mostra come i pretesi paradossi che taluno ha creduto di scoprire nella soluzione di problemi del genere ora menzionato, dipendano unicamente da *insufficienza di dati:* di questi paradossi, male a proposito imputati alla teorica delle probabilità, abbonda il ben noto libro del Bertrand; il quale ebbe il torto di lasciarsi indurre dal suo fervido ingegno a trattare un argomento pel quale gli mancava la preparazione.

Il volume dello CZUBER è corredato, come nella 1.ª edizione, della tavola numerica dei valori del solito integrale delle probabilità; alla quale tavola fanno seguito, in questa nuova edizione, le tabelle di BRUNS relative alla « Kollektivmasslehre ».

P. PIZZETTI

Digitized by Google

Attuaria.

A. MANES. — *Versicherungs-Lexikon. Ein Nachschlagewerk für alle Wissengebiete der Privat-und der Sozial-Versicheruhg in Deutschland, Oesterreich und der Schweiz.* Tübingen, J. C. B. Mohr, 1909.

Fra i rami più recenti di scienza applicata nessuno prese in breve tempo uno sviluppo così portentoso come l'Attuaria, disciplina che compendia e coordina gli svariatissimi aspetti sotto cui si è svolto il concetto di assicurazione. Essa si trova al confluente di scienze disparatissime quali la matematica e la medicina, la statistica ed il diritto; nessuna, quindi, poteva prestarsi meglio ad una di quelle opere collettive che sembrano essere caratteristiche dell'epoca attuale e nella cui organizzazione i tedeschi sono maestri insuperati; per ciò il volume che annunziamo, prodotto del lavoro di sedici specialisti guidati dal Professor MANES, poteva venire agevolmente preconizzato. Per la parte matematica egli fece un'ottima scelta nel Prof. ALFREDO LOEWEY, noto favorevolmente sia tra gli analisti che nel campo attuariale.

Un dizionario sfugge ad una minuta analisi e può essere giudicato soltanto dopo esser stato posto ripetutamente alla prova; onde noi ci limitiamo a rilevare come ogni articolo sia munito di una larga bibliografia e che tutta l'opera, essendo diretta specialmente a paesi dove si parla tedesco (si veda il titolo), non potrebbe venire utilmente *sic et simpliciter* tradotta in italiano; ma, dato lo sviluppo che l'Attuaria ha preso anche presso di noi, potrebbe convenientemente venire liberamente voltata nella nostra lingua da persona abbastanza addentro alle leggi italiane per essere in grado di apportavi le necessarie modificazioni; sarebbe questo un lavoro che potrebbe forse effettuarsi sotto gli auspici di una delle grandi compagnie d'assicurazioni aventi la loro sede al di quà delle Alpi.

G. L.

Attualità.

Annuaire pour l'an 1910 publiée par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifique. Paris Gauthier-Villars (Prezzo fr. 1. 50).

Oltre le rubriche consuete, questo volume della rinomata collezione così preziosa per gli astronomi, i fisici, ecc., contiene i seguenti articoli:

Digitized by Google

B. Baillaud. — *Notice sur la réunion du Comité international permanent pour l'exécution photographique de la Carte du ciel en 1909.*

C. Lallemand. — *Les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre.*

Il volume si chiude con tre utilissime « Tables des notices de l'Annuaire du Bureau des longitudes de l'origine à 1910 » cioè indice cronologico, indice per nomi d'autori ed indice metodico per ordine alfabetico delle materie.

G. L.

NECROLOGIO.

VALENTINO CERRUTI

(n. 14 febbraio 1850, m. 20 agosto 1909)

Ricordo un mattino d'ottobre del 1891 (avevo 23 anni ed era ufficiale nell'Esercito) mi recai alla Sapienza, e chiesi di parlare al Signor Rettore. Fui subito introdotto in un'ampia sala, dal fondo della quale mi venne incontro con grande cortesia Valentino Cerruti. Era la prima volta che io lo vedeva. Invitato a parlare, gli narrai i miei casi con un'eloquenza insolita, come se la presenza di quell'uomo, ch'era salito in si breve tempo a tanti onori, avesse subitamente ravvivato il fuoco delle mie speranze. E non sperai invano. Egli mi chiese de' miei studi negl'istituti militari, de' miei talenti, delle mie aspirazioni; poi con fare paterno m'illuminò de' suoi consigli, mi rianimò con le sue parole; e come esempio di quanto possa la volontà, mi pose innanzi sè stesso, narrandomi i primi suoi passi nella vita scientifica. Da quel giorno trovai la mia via; e avessi pur avute le forze per emulare il Maestro! Comunque, in breve ora conobbi due uomini: Valentino Cerruti e me stesso. Tanto può la virtù dei grandi sull'animo dei giovani!

Non dunque la sola ammirazione, bensì un sentimento forte di gratitudine oggi mi spinge a scrivere di Lui; oggi che, vinte le prime angoscie dell'ora fatale, e assuefatta la mente al doloroso pensiero di non vederlo mai più, tornano i ricordi a mormorare dolcemente nel cuore, come i ruscelli giù per la china del monte dopo una grande bufera.

* * *

Egli era della terra che diede all'Italia Quintino Sella. Nacque a Croce-Mosso nel 1850, in una casetta solitaria posta

Digitized by Google

a piè d'un monte roccioso, dalla cui vetta si gode nelle mattine serene il panorama del Monte Rosa. Là Egli saliva fanciullo a cullare i sogni della fanciullezza; là Egli tornava maturo a cercar lena alle fatiche degli studi e della vita pubblica; là Egli volse l'ultimo sguardo prima d'esalare il nobile suo spirito.

A '18 anni fu mandato dal padre a studiare nel Politecnico di Torino. Dotato d'un ingegno docile a qualunque disciplina, Egli si distinse nei diversi rami della tecnica, come già prima, al Liceo di Biella, negli studi classici; e mostrò la sua vocazione per le matematiche risolvendo con una cultura non comune a quella età e a quelle scuole alcuni problemi, che il giornale del Battaglini e i « *Nouvelles Annales de Mathématique* » proponevano agli studenti delle Università.

Nel 73 presentò una tesi « Sui sistemi elastici articolati », assai bella per quei tempi, e conseguì la laurea d'ingegnere. In quell'anno, o poco dopo, gli capitarono nelle mani le memorabili lezioni sulla teoria dell'elasticità del Lamé. Gli apparì innanzi agli occhi un mondo nuovo, come Egli stesso ebbe a dirmi, e fin d'allora rivolse la mente a quelle profonde meditazioni sui problemi dell'elasticità, che dall'ottanta in poi gli valsero gloria e fortuna.

Senonchè, le esigenze della vita prima, e i doveri della professione poi, gl'impedirono per qualche anno di dar forma e colore a cotesti pensieri. E invero, dopo aver cercato un impiego nell'Amministrazione delle Strade ferrate, si ridusse a Roma; e chiesto ed ottenuto un posto d'assistente nel Politecnico, si diede con tutto l'ardore al compimento de' suoi doveri. Il Cremona, che col suo occhio d'aquila aveva subito apprezzato l'ingegno e l'operosità del giovine ingegnere e divinatone i destini, lo fece suo segretario, affidandogli in pari tempo le esercitazioni d'idraulica, quelle di topografia e il corso di fisica tecnica.

Oppresso, non vinto, da tanto lavoro quotidiano, Egli dedicava parte della notte agli studi prediletti, approfondendo le sue cognizioni nei più svariati rami dell'analisi; ove doveva poi trovare la materia necessaria per lo sviluppo delle sue ricerche di meccanica teorica. A tarda ora, in una solitaria stanzuccia presso i locali della biblioteca, al fioco lume d'una lucerna, Egli viveva con Eulero, col Lagrange, col Cauchy; pascendo delle loro opere la sua mente avida di scienza, dimentico del mondo e delle fatiche giornaliere. Oh bei giorni — sospirava Egli, già maturo, ricordandoli — come siete presto passati!

Intanto, pel trasferimento di Eugenio Beltrami a Pavia,

Digitized by Google

rendevasi vacante la cattedra di meccanica razionale. La Facoltà con voto unanime gliene affidò la supplenza. In quel primo anno del suo insegnamento della meccanica pubblicò alcune memorie: sul viriale; sui moti non periodici dei punti materiali; sulle piccole oscillazioni dei corpi rigidi; lavori condotti con molta eleganza, alla maniera classica di Eulero e del Poinsot; i quali gli fruttarono nel '77 la nomina a professore straordinario. Entrato così nell' arringo universitario, e liberatosi da quegl' insegnamenti tecnici, che gli toglievano il miglior tempo, tornò alle sue meditazioni predilette sui problemi dell'elasticità.

Fioriva a quei tempi in Pisa Enrico Betti, il cui genio innovatore gettava sprazzi di luce in tutti i campi delle matematiche. Questo sommo aveva dato (fin dal '72) un metodo per la risoluzione dei problemi dell' equilibrio elastico, analogo a quello celebre del Green nella teoria del potenziale; fondandosi sopra un teorema ora conosciutissimo col nome di « teorema di reciprocità del Betti ».

Il Cerruti, che aveva seguito con vivo interessamento i progressi della teoria dell' elasticità, trovò in quel metodo la chiave per penetrare negli oscuri labirinti della teoria, e ne imprese l' estensione ai problemi delle vibrazioni dei corpi elastici. Con ardita e geniale intuizione scoprì i cosidetti integrali dotati di singolarità, e pervenne ad assegnare l'espressioni della dilatazione, della rotazione e degli spostamenti di ciascuna particella del corpo, in ogni istante, in funzione degli elementi fondamentali del moto. In queste ricerche, pubblicate nell' 80, si trova una formula, divenuta poi celebre sotto il nome di « formula del Kirchhoff » (il quale la diede esplicitamente due anni dopo), che traduce analiticamente il principio dell' Huygens. Il Cerruti non volle mai far valere la sua priorità; un pò per modestia e fors'anche per devozione al gran nome del Kirchhoff; un pò perchè riconosceva il torto (sono parole sue) d'aver dato alle stampe ricerche troppo affrettate, che contenevano talune sviste, e lasciavano in ombra molte cose. Non dimenticò e non perdonò a se stesso questi lievi e comuni errori di foga giovanile; per modo che negli anni maturi ebbe quasi avversione a stampare studî men che perfetti; chè molti e importanti deve averne lasciati inediti (1).

Questa prima e brillante vittoria del suo ingegno, gli aprì la via a una serie di studî sui problemi della statica elastica,

(1) Mentre erano alla stampa questi fogli è uscita nel Nuovo Cimento una Necrologia scritta dal Dott. Silla, nella quale sono alcuni cenni dei lavori inediti. Vedi anche la Commemorazione fatta dal Prof. Levi-Civita ai Lincei, della quale mi son valso per taluni particolari.

Digitized by Google

che lo posero in prima linea tra i matematici italiani e stranieri. In una memoria « Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi », edita nell'82, portò notabili ed eleganti modificazioni e semplificazioni al metodo del Betti; mostrando come basti per la completa soluzione dei problemi dell'equilibrio elastico lo studio di certe deformazioni ausiliarie e la ricerca di una funzione armonica. Il metodo cosi modificato è rimasto nella scienza col nome di « metodo Betti - Cerruti », e trovasi esposto nei migliori trattati. Nè si fermò a questi studî d'indole generale, ma ne imprese l'applicazione a problemi concreti di grande importanza, vincendo talora difficoltà non lievi. Fu il primo a cercare col nuovo metodo le deformazioni del suolo isotropo, d'una sfera isotropa e d'un involucro sferico per dati spostamenti o date forze alla superficie. Quanto impulso abbiano dato agli studi dell'elasticità in Italia questi lavori del Cerruti fu messo in evidenza dal Prof. Marcolongo, nel suo bellissimo rapporto al Congresso di Parma sui progressi e sullo sviluppo della teoria in discorso, ed è ormai cosa universalmente conosciuta.

Tale fu, per tacer delle minori, l'opera scientifica di Valentino Cerruti. E, certo, Egli avrebbe lasciata opera più bella e duratura, se, conosciutasi la sua valentia, la sua operosità e la sua rettitudine nei negozî amministrativi, non fosse stato per tempissimo incaricato di mille importanti faccende, che gli tolsero quel miglior tempo che altri dedicavano agli studî. Talora si doleva d'esser troppo spesso distolto dalla scienza; ma ebbe la suprema virtù di sacrificare sempre i suoi ideali di scienziato ai doveri di cittadino. Nell'80 fu, col Cremona, riorganizzatore della Biblioteca Vittorio Emanuele; nell'83 Regio Commissario alla Biblioteca Alessandrina; dal novembre '86 all'aprile '87 Segretario generale all'Istruzione col Ministro Coppino; poi, per molti anni, Rettore; Presidente di molte commissioni e della Società italiana degli Ingegneri e Architetti; membro della Giunta del Consiglio superiore dell'istruzione; Segretario per la classe di Scienze fisiche e matematiche dell'Accademia dei Lincei, alla quale apparteneva come socio nazionale; dal 1903 fino alla morte Direttore della Scuola degli Ingegneri; e infine, per tacer d'altro, elevato agli onori del Senato, relatore di molte leggi e membro di Commissioni Reali di grande importanza.

In tutte queste cariche Egli brillò per diligenza e rettitudine, e per profonda conoscenza degli uomini e delle cose. E come al dovere sacrificava tutto se stesso, così agli interessi e alle ambizioni delle persone preponeva giustamente il bene pubblico; ond'ebbe noie e amarezze infinite; le quali sopportò con animo sereno, senza odî o rancori; ben sapendo che nelle società

Digitized by Google

corrotte tanto è disprezzata la virtù quanto ammirato l'ingegno.

In mezzo a tante e si varie occupazioni, che avrebbero stancata qualunque fibbra men forte della sua (fatiche che forse accelerarono lo sviluppo del morbo che lo trasse a immatura fine) non dimenticò mai la sua scienza prediletta, alla quale tornava ogni ora, ogni minuto che avesse libero; onde acquistò cultura tale, da farlo annoverare tra i più dotti del tempo. Domandato intorno a qualunque argomento di matematica, rispondeva con tanta sicurezza, e copia d'erudizione, e con sì ampie e precise notizie bibliografiche, che lasciava talora l'ascoltatore più presto stupito che soddisfatto. Nelle sue lezioni di matematiche superiori, trattasse di fisica matematica, o di meccanica, o di analisi, erano sempre le memorie dei grandi che illustrava e svolgeva in tutti i particolari. Gli mancava, è vero, quell'arte di esporre con parola facile ed elegante, in cui fu maestro il Beltrami; ma in compenso aveva una sì fatta valentia nel calcolo, che sempre riusciva a porre in evidenza l'idea direttrice anche in mezzo a una selva di formule.

Alla straordinaria erudizione matematica accoppiava una cultura storica e letteraria non comune. Fu scrittore corretto, sobrio, elegante; come appare da molti suoi scritti, discorsi, relazioni; e principalmente dalle commemorazioni del Beltrami e del Cesàro, che sono certo fra le più belle scritture del genere. Imparò dal Petrarca, dal Macchiavelli, dal Galileo: autori che lesse e meditò e postillò tutta la vita. Nelle brevi passeggiate che faceva in compagnia de' suoi allievi più intimi, soleva intercalare le sue dotte conversazioni sulle opere matematiche dei grandi con qualche sonetto del Canzoniere, che recitava con molta grazia e sentimento. Così educava a un tempo la mente e il cuore!

Spirito sereno, equilibrato, arguto, era cordiale con tutti e sempre, senza affettazioni; di modi semplici, ma signorili e amabili per una tal quale cortese gravità; più facile alla lode che al biasimo; giusto e fermo con gl'inferiori, senza severità e senza rancori; rispettoso e devoto ai maggiori, senza servili sottomissioni; sincero e verecondo negli affetti, come un fanciullo.

* * *

Nelle ore d'oblio della faticosa vita, quando l'animo si riposa e si ritempra nelle memorie del passato, e la fantasia ci fa rivivere coi cari che furono e che amammo; a me piace e mi conforta l'imaginare il mio amato Maestro, spirito felice, nel concilio di quei grandi, che tanto amò ed emulò in questo mondo; ove ha lasciato nobilissimo esempio d'una vita purissima, spesa nel culto della scienza e del dovere. PIETRO BURGATTI

Digitized by Google

RECENTI PUBBLICAZIONI

BACHMANN, Niedere Zahlentheorie. I. Teil 402 pag. (1902) leg. lire 18.50. — II. Teil (Schluss): Additive, 480 pag. con fig. (1910) leg. Lire 22.25.

BARNARD a. CHILD, A new Algebra. Part. I-IV. L. 5.75

BASSET, A Treatise on the Geometry of Surfaces. Lire 14.

BRIOSCHI, Opere matematiche. Vol. V (ultimo) 1910. Lire 30. Vol. I a IV cad. Lire 25,

GRASSMANN, Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. 2 Bde. I. Bd. Binâres. Lire 16.

HADAMARD, Leçons sur le calcul des variations. Tome I (1910) L. 18.50.

HÖFLER, Didaktik des mathematischen Unterrichts Sammlung didakt. Handbücher f. d. realist. Unterricht an höheren Schulen Bd I), (1910) Lire 16.

KELVIN, Mathematical and Physical Papers Vol. IV: Hydrodinamics and general Dynamics. Lire 24.

KILLING U. HOVERSTADT, Handbuch d. mathemat. Unterrichts. I. Bd. Con 32 fig. nel testo di 456 pag. (1910). Lire 13.

KLEIN, Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare, redatte da F. Tägert e tradotte dal Prof. F. Giudice, con pref. del Prof. G. Loria (1896) L. 3.

KLEIN, Elementarmathematik v. höheren Standpunkte aus.

1. Teil: Arithmetik, Algebra, Analysis. 590 pag. autografe con fig. L. 10.

2. Teil: Geometrie 615 pag. autografe con fig. (1909) L. 10.

LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 volumi (1909) L. 44.

LILIENTHAL, Vorlesungen üb. Differentialgeometrie I, Bd: Kurventheorie. Con 26 fig. nel testo di 370 pag. (1901) Lire 16.

LORIA GINO, Le trasfigurazioni di una scienza. Donne matematiche. (1902) 8° L. 2.

LORIA GINO, Metodi di geometria descrittiva. 16° (1909) L. 3.

LORIA GINO, Il passato ed il presente nelle principali teorie geometriche. III ediz, (1907) L. 8.

LORIA GINO, I poligoni di Poncelet: discorso 8° pag. 50 (1889) L. 3.

Digitized by Google

LORIA GINO, Spezielle algebraische u transzendente ebene Kurven. Theorie u. Geschichte. Deutsch v. Schütte. II Anflage. I Bd: Die algebraischen Kurven. Con 141 fig. su 14 tavole litografate. 490 pag. (1910) L. 21.50.

LORIA GINO, Vorlesungen ûb. darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte I: Die Darstellungsmethoden. Con 163 figure nel testo di 220 pag. (1907) L. 9.

RIQUIER, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1909) Lire 20.50.

SEGRE C., Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche: nota. (1889) L. 4.

SEGRE C., Le coppie di elementi imaginarii nella geometria proiettiva sintetica (1886) L. 4.

SEGRE C., Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito (1895) L. 4.

SEGRE C. Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario, ecc. (1885) L. 4.

SIMON, Geschichte d. Mathematik in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. L. 17.

STAUDE, Analytische Geometrie d. Pùnktepaares; des Kegelschnittes u. d. Fläche zweiter Ordnung. 1. Teilbd. 548 pag. con 181 fig. (1910) leg. L. 28.50.

STURM, Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften. 4 Bände

I. Bd: Die Verwandschaften zwischen Gebilden 1. Stufe. 415 pag. (1908) leg. L. 21.

II. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden 2 Stùfe. 346 pag. (1908) leg, L. 21.

III. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden III. Stùfe. 584 pag. (1909) leg. L. 26.

IV. Bd: Die nicht linearen u. d. mehrdeut. Verwandschaften II. u. III. Stufe. 486 pag· (1909) leg. L. 26.

SYLVESTER, The collected mathematical Papers.

Vol. 1 1837-1853 L. 24.

Vol. II 1854-1863 L· 24.

Vol. III 1870-1883 L. 24,

THIELE, Interpolationsrechnung (1910) L. 13.

Genova — TIPOGRAFIA FRATELLI CARLINI FU G. B.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XII — FASC. II.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1910

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

G. Vacca, Sulla storia del principio d'induzione completa, p. 33-35.

Astronomia (Harzer) p. 35.

Principi della Geometria (Schur) p. 36-43.

Didattica (Simon, Gutzmer, Galdeano) p. 44-50.

Matematica elementare (Dintzel, Lesser, Borel, Tannery) p. 50-52.

Geometria costruttiva (Müller, Adler) p. 52-56.

Teoria dei numeri (Minkowski, Karnasch) p. 56-60.

Algebra elementare (Palmieri) p. 60-61.

Programmi e riassunti di corsi universitari: Università Clark; Prof. V. Volterra, p. 61-62.

Notizie. Museo di strumenti. Mecenatismo americano. Per la storia del regolo calcolatorio. Una nuova società matematica. Il I centenario della nascita di Grassmann. Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche p. 63-64.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XII — Aprile, Maggio e Giugno — 1910

SULLA STORIA DEL PRINCIPIO D'INDUZIONE COMPLETA

Nota di G. VACCA.

I.

Ho dimostrato altrove (1) che al matematico italiano Maurolico si deve il primo uso sistematico del principio d'induzione completa, e che da Maurolico lo trasse Pascal (2). Però un enunciato preciso e completo del principio stesso è più moderno. In J. Bernoulli (3) è dato come un metodo di dimostrazione utile in molti casi. L'enunciato di Bernoulli è più generale ed astratto di quelli di Maurolico e di Pascal: quindi il suo nome merita di essere ricordato. Ma il principio d'induzione, soltanto in tempi recentissimi (Dedekind, Peano) è stato completamente formulato, e posto a base dell' aritmetica.

È interessante chiedersi come mai Maurolico sia giunto a scoprire questo principio, e se nei Greci non se ne trovi traccia.

Mi sembra ora di poter dimostrare che il principio d' induzione è stato adoperato da Euclide, e che soltanto il poco uso che egli ne fa, e le frasi concise che egli adopera, non hanno permesso per molti secoli, a coloro che studiarono l' opera sua di apprezzarlo, e di estenderne l' uso ad altri teoremi. Questa osservazione non toglie nessun merito all' acuta indagine di Maurolico, ne precisa anzi l' origine e può fino ad un certo punto farci supporre come il matematico messinese sia pervenuto alla importante scoperta.

---

(1) *Formulaire mathematique*, publié par G. Peano, 1903, t. 4 p. 35, e più diffusamente in Bull. of the Amer. Math. Society, 1909, ser. II, vol. XVI p. 70-73.

(2) *Oeuvres*, Paris, Hachette, 1909, t. 3 pag. 377.

(3) J. Bernoulli, *Acta Eruditorum* 1686, m. Julii. pag. 360.

Digitized by Google

II.

Nella proposizione 21 del libro VIII (seguendo la bella versione di Tartaglia [1]) si dimostra:

Se di tre numeri continuamente proporzionali il primo sarà quadrato, ancora il terzo è necessario esser quadrato.

Servendosi di questa proposizione, e del principio d'induzione completa, Euclide dimostra allora la proposizione ottava del IX libro:

Se saranno più numeri dalla unità continuamente proporzionali, il terzo dall' unità sarà quadrato, e da lì indietro sempre intermesso uno . . .

Siano dall' unità a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n *continuanuamente proporzionali; dico* b *esser quadrato, e* d *(interlasciando* c*) e così gli altri, sempre interlasciando uno, onde semplicemente tutti quelli che stanno nei luoghi dispari sono quadrati, come il terzo, il quinto, il settimo . . .*

[A] *Perchè (dal presupposto)* a *è in* b *quante volte è la unità in* a, *adunque* b *(per la definizione) è quadrato.*

[B] *Perché adunque* b, c, d *sono continuamente proporzionali, essendo* b *quadrato, è manifesto (per la vigesima prima dell' VIII libro),* d *essere quadrato.*

[C] *E per la medesima ragione* f, *perchè* d, e, f *sono continuamente proporzionali, e* d *è quadrato.*

[D] *E il medesimo in tutti gli altri dall' uno intermesso, . . . adunque il proposito è manifesto.*

In simboli moderni, la proposizione ausiliare VIII, 21 si può enunciare:

Se a, b, c sono interi tali che $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, ed a è quadrato, anche c è quadrato.

E la IX, 8:

Se a_0, a_1, a_2, a_3, . . . sono numeri interi continuamente proporzionali se cioè $\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}}$ ed $a_0 = 1$, i termini a_2, a_4, . . . sono quadrati.

---

(1) Tartaglia, *Euclide Megarense philosopho*, Venetia 1565. Nel riportare la versione di Tartaglia mi sono permesso di ridurla all' ortografia moderna.

Digitized by Google

Infatti [A] $a_2 = a_1^2$, e quindi a_2 è quadrato.

[B] $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$, e poichè [A] a_3 è quadrato, anche a_4 è quadrato [VIII, 21].

[C] allo stesso modo si dimostra che a_6 è quadrato;

[D] e il medesimo in tutti gli altri casi dall' uno intermesso: cioè per a_8, a_{10}, . . .

Lo stesso metodo è adoperato da Euclide per dimostrare la proposizione 9 del IX libro.

La frase di Euclide che *implica* il principio d' induzione, è soltanto questa:

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

[E nello stesso modo dimostreremo che tutti i rimanenti sono quadrati].

Queste dimostrazioni di Euclide, sebbene semplici per noi (racchiudendo esse soltanto la proprietà associativa della potenza: $(a^m)^n = a^{(mn)}$, per $m = 2, 3$), rappresentano un considerevole progresso sulle altre dimostrazioni aritmetiche dei matematici greci. E non è difficile che esse siano state il primo passo verso una scoperta, la difficoltà della quale consisteva sopratutto nella astratta formulazione di un principio generale. Ed il merito di Euclide acquisterà maggiore rilievo quando si confronti la sua nitida esposizione coi ragionamenti più incerti e complicati di Leonardo Pisano (1), allorchè egli tenta dimostrazioni le quali esigono, per essere rigorose e concludenti, l' uso del principio di induzione.

Genova, Dicembre 1909.

Astronomia.

P. Harzer, *Ueber geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmlskörpern nach fünf Beobachtungen.* Publikationen der Sternwarte in Kiel. XII. Leipzig, 1910.

---

(1) Leonardo Pisano, *Opuscoli* ed. Boncompagni 2.ª ediz. Firenze 1856, pag. 62-64:

Volo demonstrare quare ex ordinata imparium collectione ab uno incipiendo in infinitum egrediatur ordinata series quadratorum.

Digitized by Google

Fondamenti della Geometria.

FRIEDRICH SCHUR — *Grundlagen der Geometrie.* — Leipzig und Berlin - Teubner 1909. pag. VII+192 con 63 fig. nel testo (Prezzo del vol. Mk. 6 - leg. Mk. 7).

L'A. presenta questo libro come una rielaborazione delle « Vorlesungen über neuere Geometrie » del Pasch alla luce delle recenti ricerche sul coordinamento dei postulati e sulla dipendenza da essi delle proposizioni geometriche (p. v).

Si tratta quindi anzitutto di enunciare un sistema di postulati sul fondamento dei quali possa stabilirsi la geometria proiettiva e la metrica generale, euclidea e non euclidea. È noto che molte ricerche moderne hanno mostrato come la geometria projettiva e la metrica possano stabilirsi, nelle loro linee fondamentali, indipendentemente dal postulato d'Archimede, postulando in vece sua qualche semplice proposizione metrica, la quale non involge il postulato medesimo. A tali recenti sviluppi l'A. ha portato notevoli contributi; ed appunto anche in questo libro — prima essenzial differenza dal procedimento del Pasch — il postulato d'Archimede viene introdotto solo nell'ultimo paragrafo, dove se ne studiano le conseguenze, in quanto permette di dimostrare qualcuna delle proposizioni metriche prima postulate, ed in quanto limita il campo in cui si svolge la geometria.

Il Schur poggia il suo sistema, come già il Peano (1), sulle tre idee primitive di *punto*, *segmento* e *moto*. (Il Pasch aggiungeva quella di *porzione limitata di piano).*

La considerazione del *segmento* come idea primitiva permette (§ 1) di dare ai postulati grafici (2) tal forma ch' essi siano realizzabili in un campo limitato (come il Klein aveva preconizzato, e il Pasch già effettuato) e precisamente in uno spazio convesso; per esempio nell' interno di un tetraedro.

Nel § 2 si mostra come, dal fatto che in un tale spazio limitato esistono forme di 2.ª specie complete (le stelle aventi il centro interno ad esso spazio) possa dedursi per tali forme e

(1) *Principii di Geometria.* Torino. Bocca 1890. — *Sui fondamenti della Geometria.* Rivista di matematica IV-1894.

(2) Postulati *projettivi* secondo l'A.; postulati *di appartenenza e di ordinamento* secondo l'Hilbert: ma tati denominazioni non paiono totalmente appropriate perchè non si comprende fra questi postulati e fra le loro conseguenze la proposizione di Pappo — (Pascal), eminentemente di appartenenza, fondamentale per la geometria projettiva!

Digitized by Google

con tutta generalità il teorema di Desargues (Cfr. Reyes y Prosper - Math. Ann. 32) e completare quindi lo spazio coll'aggiunta di elementi ideali, per una via sostanzialmente già indicata dal Pasch (l. c. e Math. Ann. 32) e dal Schur medesimo (Math. Ann. 39).

Interviene quindi la nozione di *moto* (§ 3) i cui postulati la chiariscono come un gruppo di trasformazioni puntuali che conserva i segmenti, tali che una trasformazione del gruppo e è l'identità tosto che essa conservi un punto, una direzione per esso e una banda di un piano passante per quel punto e per quella direzione. È fondamentale qui, ed in tutta l'opera, la considerazione di quei moti che tengon fisso solo un punto e una direzione per esso (ribaltamento del piano intorno ad una sua retta — rotazione dello spazio attorno ad un asse). Queste considerazioni permettono di introdurre il concetto della polarità assoluta (polarità ortagonale) e di dimostrare il teorema di Pappo (1) come già aveva esposto l'A. in Math. Ann. 51, mediante i postulati dello spazio, ed evitando così il postulato di Archimede come quello dell' invertibilità del segmento e ogni ipotesi relativa alla teoria delle parallele. Un'altra dimostrazione dovuta al Hjemslev (Math. Ann. 64) la quale pur evitando il postulato d'Archimede ed ogni postulato relativo alle parallele, si svolge però tutta nel piano ricorrendo al postulato dell'invertibilità del segmento, è riservata ad un paragrafo successivo (§ 7).

I teoremi di Desargues e di Pappo permettono di dimostrare (§ 4) che la corrispondenza fra due punteggiate la quale risulta dal prodotto di un numero qualunque di prospettività è univocamente definita quando sono date tre coppie di punti corrispondenti, indipendentemente dalla catena di prospettività che si voglia usare per definire la corrispondenza. È questa una proposizione che, pur essendo contenuta soltanto come parte nel teorema fondamentale di Staudt, compie perfettamente l'ufficio di questo per l'istituzione di tutta la geometria projettiva lineare. Già il Cremona e il Thomae avevano indicata questa via; ma il primo passo effettivo vi aveva fatto il Pasch, riuscendo a stabilire quella proposizione fondamentale con procedimenti sintetici e liberandosi dall'uso dei postulati di continuità (di Dedekind o equivalenti), il che costituisce il vero titolo di merito di questo indirizzo rispetto allo staudtiano: la dimostrazione del Pasch dipende però ancora dal postulato di

(1) L'A., seguendo un vecchio uso, lo chiama *teorema di Pascal* e riserva il nome di *teorema di Pappo* all'affermazione dell'invarianza del birapporto per trasformaziani projettive.

Digitized by Google

Archimede. La dimostrazione dell'A., fondata sui soli teoremi di Desargues e di Pappo, è sostanzialmente quella già da lui pubblicata in una Nota dei Math. Ann. 51, semplificata mercè un'osservazione del Veblen.

Fissato ora arbitrariamente sulla retta un punto projettivo (cioè punto effettivo o ideale) come punto all'infinito *(Deckelement)* il Schur è in grado di definire un calcolo per segmenti projettivi il quale gode di tutte le proprietà dell'ordinario calcolo per ascisse.

Nel seguente § 5 (Die metrische Grundformeln der nichteuklidischen Geometrie) si estende tale calcolo alla geometria piana. Il concetto fondamentale di tale estensione è — sostanzialmente, oggi — di dominio comune: nel piano projettivo si può *definire* una metrica euclidea assumendo arbitrariamente una retta del piano come retta all'infinito, e su essa una involuzione ellittica come involuzione assoluta. Le proprietà della geometria euclidea che dipendono solo dalle nozioni di congruenza e di similitudine si traducono notoriamente in proprietà projettive relative alla retta impropria e all'involuzione circolare, e possono quindi dimostrarsi per la detta metrica euclidea convenzionale, tosto che sia stabilita la geometria projettiva lineare. Fra queste — è importante rilevarlo — sono le proprietà del triangolo rettangolo e quindi quelle delle funzioni trigonometriche seno e coseno, purchè queste si considerino non già come *numeri* funzioni di altri numeri, ma come i cateti — entità geometriche — variabili di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa uguale al segmento unità e di cui gli angoli acuti — da considerarsi ancora essi come enti geometrici, non come grandezze esprimibili in numeri — variano (1). Mediante questa geometria euclidea convenzionale si può definire una *distanza projettiva* di due punti — anch'essa segmento, non numero — e l'uguaglianza di distanze projettive, la quale naturalmente non equivale in generale all'uguaglianza delle distanze metriche relative alla particolar metrica cui si riferiscono la nozione di moto e i postulati da cui la nostra geometria si è fatta derivare. Si possono analogamente definire, mediante quella metrica euclidea convenzionale, delle coordinate cartesiane ortogonali e complessivamente la geometria analitica (nel piano prima, poi analoga-

(1) Applicazione questa del « calcolo segmentario » e più generalmente del « calcolo con enti geometrici » ora quasi di dominio comune; ma di cui dobbiamo pure al Schur il primo uso per istituire la geometria analitica, indipendentemente dalla teoria aritmetica degli irrazionali (V. Schur-Lehrbuch d. anal. Geometrie — 1898 — p. 6 e seg.).

Digitized by Google

mente nello spazio): e si riesce così all'interpretazione della metrica fondamentale, a cui i postulati si riferivano, come una metrica rispetto ad una conica seguendo il concetto di Cayley-Klein.

Il Schur svolge questa idea fissando arbitrariamente nel piano un punto O ed assumendo come retta all'infinito della suddetta metrica euclidea convenzionale la polare di O nella polarità assoluta (ortogonale) definita dalla metrica fondamentale dello spazio; e su qnesta retta assume come involuzione assoluta l'involuzione dei punti reciproci per detta polarità. E tal scelta particolare, e il modo com'essa è esposta, diminuiscono la limpidità del pensiero fondamentale dandogli inopportunamente una veste di novità e di artificio; non compensata, mi pare, dal carattere geometrico ed intrinseco con cui viene a presentarsi la *costante caratteristica* (quadrato della curvatura gaussiana) dello spazio.

L'interpretazione dei risultati ottenuti, nello spazio di numeri permette di stabilire l'indimostrabilità del postulato delle parallele, ed è questo l'argomento del § 6, ove sono studiate in particolare le conseguenze del postulato euclideo rispetto alla dimostrazione dei teoremi di Pappo e di Desargues. Particolarmente notevole la dimostrazione del teorema di Pappo già esposta dall'A. nel Bd. 5 dei Math. Ann., e quì riprodotta.

Già si è ricordato che i due ultimi paragrafi (7 ed 8) sono destinati l'uno alla esposizione, leggermente semplificata, di una memoria del Hjelmslev (Math. Ann. 64) in cui si stabiliscono i teoremi di Desargues e di Pappo mediante i soli postulati metrici del piano, escluso ogni intervento dello spazio e dei postulati di continuità (di Archimede e di Dedekind); l'altro allo studio delle conseguenze del postulato d'Archimede enunciato dapprima nella sua forma projettiva (Klein), poi limitato alla sua forma metrica: questa trattazione non si allontana sostanzialmente da considerazioni note (Pasch, Hilbert, Schur — Anal. Geometrie).

***

Il libro del Schur ci presenta la riunione coordinata di parecchi studi parziali recenti sopra i fondamenti della geometria e particolarmente di varie eleganti deduzioni ed osservazioni dell'A. sparse nei volumi dei Math. Annalen.

Quando però lo si debba considerare, come l'A. dichiara, come una revisione sistematica dei principii, ci pare di non poterci astenere da alcune osservazioni e riserve.

Ed anzitutto delle *idee primitive.*

Digitized by Google

Le idee primitive di una teoria deduttiva sono le *costanti indeterminate* da cui dipende quella teoria; i postulati sono equazioni logiche fra quelle costanti che limitano la loro variabilità relativa: se però, trasformando convenientemente il sistema di quelle equazioni si può ricavarne una che sia *risolvibile rispetto ad una di dette costanti indeterminate*, ne risulterà che questa costante è realmente completamente determinata in funzione delle rimanenti: l'idea corrispondente non sarà più da considerarsi come primitiva, ma come definita: il fatto che essa fosse stata presentata come idea primitiva fa apparire ingiustamente la teoria deduttiva in questione dipendente da un numero di idee indeterminate maggiore del vero.

Il numero delle idee primitive deve dunque esser ridotto al minimo.

Da un'altro punto di vista può abbracciarsi questa riduzione del numero delle idee primitive: quando un'idea, che si assume come primitiva, può essere definita mediante le rimanenti, il sistema dei postulati comprende, in forma palese o nascosta, la possibile definizione di quell'idea: questo postulato è evidentemente indipendente dai rimanenti perchè per contraddire ad esso basta attribuire al membro definito (ora idea primitiva) significato diverso da quello del membro definente, il quale già si suppone completamente noto mediante le idee primitive rimanenti. Ora, mentre è comune consenso che i postulati debbano ridursi al minimo numero e indipendenti, si potrebbe con simile artificio accrescere illimitatamente il numero delle idee primitive e quello dei postulati indipendenti, senza alcun vantaggio per la teoria.

Ora il Schur fa dipendere il suo sistema geometrico da tre idee primitive: « punto » « segmento » e « moto » mentre varie ricerche recenti, particolarmente quelle del Pieri (1) e le mie proprie (2) hanno mostrato che il loro numero può ridursi a due.

V'ha però un punto di vista importante dal quale può giustificarsi e rendersi necessaria una certa sovrabbondanza nelle idee assunte come primitive. Ed è anzitutto quando, col Hilbert, si assegni come oggetto all'analisi dei principii lo studio del-

(1) *I principii della geometria di posizione* ecc. (Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino - 1898) — *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* (ibid. 1899).

(2) *Fondamenti della metrica projettiva* (Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino - 1904).

Digitized by Google

l'ufficio che nell'edificio geometrico compie tal proposizione o gruppo di proposizioni: la ricerca dirama allora in direzioni svariate e nell'una o nell'altra può esser utile di assumere come acquisito in blocco un certo gruppo di idee. Ma si può conciliare questo indirizzo colla ricerca di una esposizione sistematica; ed è quando si suddivida la teoria in segmenti successivi di cui ciascuno si subordini ai precedenti o li supponga. Così può subordinarsi la geometria metrica alla projettiva, la meccanica alla geometria. Allora ciascun nuovo segmento condurrà alla introduzione di nuove idee primitive, se anche col mutare l'ordinamento delle teorie sarebbe possibile evitarne taluna.

A un simile pensiero pare essersi ispirato il nostro A. assegnando ai due primi paragrafi le conseguenze — com'egli dice (1) — dei soli postulati projettivi e ai seguenti le proposizioni che dipendono inoltre dai postulati metrici. Un tal proposito giustifica pienamente l'assunzione dapprima delle idee primitive « punto » e « segmento » mediante le quali quelle proposizioni grafiche possono stabilirsi, e l'aggiunta successiva dell'idea di « moto ». Ma mal si saprebbe precisare quali secondo il Schur debbano chiamarsi proposizioni projettive, quando da esse viene rigettato il teorema di Pappo. Nè sarebbe stato impossibile attenersi rigorosamente alla richiesta assumendo per es. questa proposizione come postulato grafico.

Il vero è che l'oggetto e il principal interesse del libro del Schur consiste per l'appunto nel mostrare come dipendano dai postulati della metrica generale le proposizioni projettive fondamentali: e molto con ragione osserva l'A. (2) che il sistema del Pieri (3), il quale mercè i postulati metrici riduce le idee primitive alle due di « punto » e « moto », non fa servire i postulati metrici a ridurre il numero e il contenuto di quelli prettamente projettivi; per cui, volendo restare al punto a cui l'argomento è portato da quel lavoro, non sarebbe ingiustificato il tenere almeno provvisoriamente distinte quelle proposizioni projettive che ancora non si son fatte utilmente dipendere dai postulati metrici.

Mi si permetta però di rilevare che tal riduzione di quelle prime proposizioni projettive ai postulati metrici ho fatto io —

(1) p V. linee 30-32.

(2) p. 10 — Math. Ann. 55 p. 266.

(3) *Della geometria elementare* ecc. Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino 1899.

Digitized by Google

con successo, ritengo — nel già citato lavoro (1). Prendendo in esso come idee primitive quelle di « punto » e di « congruenza fra due coppie di punti » ho mostrato come dalla riunione dei postulati grafici e metrici risulti la possibilità di istituire la geometria lineare e la metrica evitando tutti i postulati relativi ai segmenti e all' ordinamento dei punti, come pure tutti quelli che includono l' infinità dello spazio.

* * *

Un' osservazione di fondamentale importanza deve farsi ancora rispetto alla geometria ellittica.

Nella Memoria già citata dei Math. Ann. 55, che già contiene le linee fondameutali dell' opera presente, il Schur osserva che i postulati grafici (postulati relativi alle idee *punto* e *segmento)* valgono per la geometria ellittica solo per una regione limitata di spazio (2). L' osservazione non è ripetuta in modo esplicito nel libro che esaminiamo: è però ricordato alla p. IV (linea 15-16) come l' indirizzo suggerito dal Klein pel fondamento della geometria projettiva chiedesse la sola validità dei postulati in un campo finito e così alla pag. 6 si osserva che i postulati relativi al « segmento » sono enunciati per modo da assicurarne la validità solo per « parti limitate della retta », pei « cosidetti punti raggiungibili », « come corrisponde all'origine dei postulati geometrici ».

Tale riserva è logicamente vana: inutile richiamarsi alla origiue dei postulati geometrici, la quale certamente è fuori del campo della logica deduttiva e piuttosto si ritrova nella conciliazione di intuizioni contradditorie (3): i postulati definiscono lo *spazio* cui si riferisce la nostra geometria come il campo della loro validità; se l' ordinario spazio ellittico è in qualsiasi contraddizione con essi, ciò significa che essi escludono la geometria ellittica, non meno di quanto il postulato di Euclide escluda le geometrie non paraboliche.

Nella mia già ricordata memoria « Fondamenti della metrica projettiva » si trova per la prima volta risposto in modo

(1) È quindi assolutamente arbitraria (ed invero in nessun modo è giustificata) l' affermazione dell'A. che le relazioni intime fra i postulati grafici e quelli del moto siano puramente di natura infinitesimale (p. 10).

(2) Math. Ann. 45 a pie' di p. 267 ††) e a pie' di p. 274 †††).

(3) Cfr. il mio « *Le idee scientifiche primordiali* » discorso inaugurale dell'Università di Cagliari per l' anno 1907-08. Annuario della R. Università di Cagliari 1907-08. — Bollettino di Matematica diretto da A. Conti 1908. Cfr. pure l' introduzione alla mia Memoria citata.

Digitized by Google

logico rigoroso alla domanda del Klein; e alla richiesta che i postulati siano validi in un campo finito e non diano la preferenza all' una o all' altra metrica projettiva è data un'interpretazione non contradditoria alla validità di essi in tutto lo spazio che si *vuole* con essi definire. I postulati grafici del Schur escludono, al contrario, la geometria ellittica propriamente detta (2). A vero dire — e parmi la cosa molto interessante ad esser rilevata e costituire importante titolo di merito della forma che qui questi postulati hanno acquistato in confronto con forme precedenti — questi postulati non sono affatto incompatibili colla geometria projettiva. Per persuadersene basta interpretare la geometria projettiva piana sopra un'emisfero a cui si sia attribuito solo la metà della sua circonferenza terminatrice, e a questa semicirconferenza si sia inoltre attribuito uno solo degli estremi senza fare inoltre alcuna ipotesi atta a stabilire la chiusura delle rette-semicirconferenze massime (ipotesi che si fa invece quando tale emisfero si considera come rappresentante la stella di rette). La contraddizione interviene solo quando si postuli la conservazione della nozione di « segmento » rispetto a certe trasformazioni (projettività, movimenti) o, ciò che è lo stesso, l' omogeneità dello spazio rispetto alla nostra geometria. Nella geometria accennata manca invero tale omogeneità; sopra ogni retta esiste un punto che non è mai interno ad un segmento di essa.

Nei particolari riguardi del sistema di postulati del Schur, considerato in sè, e non in quanto esso debba servire di fondamento alle tre metriche projettive, tale sistema è compatibile con una metrica a conica assoluta immaginaria finchè non vi si includa il postulato d'Archimede. Esso è cioè verificato sia dalle geometrie parabolica e iperbolica sia dalla geometria non-legendrea del Dehn (1). L' introduzione del postulato d' Archimede riduce questo sistema a poter servire di base soltanto alla geometria di Euclide e a quella del Lobatcevsky.

BEPPO LEVI

---

(2) In cui cioè si ammettono tutti gli ordinari postulati, inclusi quelli di continuità (di Dedekind e di Archimede).

(1) *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* — Math. Ann. 53.

Digitized by Google

Didattica.

M. Simon. — *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. II umgearbeitete und vermehrte Auflage.* München, Beck, 1908, 8° gr. p. 208.

Nel rendere conto della I edizione di quest' opera. io ebbi a notare *(Periodico di matematica per l' insegnamento secondario,* T. XI, 1896, p. 43) la poca propensione dei matematici italiani per le ricerche di ordine didattico; ora è mio dovere di dichiarare come, durante questi ultimi quattordici anni, lo stato delle cose abbia radicalmente mutato e come la patria nostra abbia in più modi manifestato d'interessarsi e sia riuscita a contribuire al movimento generale manifestatosi in tutto il mondo per dare sostanza e forma più moderne all' insegnamento elementare delle scienze esatte. Per ciò, se ci azzardassimo a fare una previsione, diremmo che il lavoro del Simon troverà oggi un maggior numero di lettori al di quà delle Alpi di quanti ne abbia avuti allorquando vide per la prima volta la luce; appunto per tale ragione non possiamo a meno di lamentare che lo stile originale dell' A., il suo sistema di citazioni telegrafiche, talora inintelligibili a chi non abbia una vastissima cultura nella letteratura filosofico-didattica ultramontana (1), i frequenti riferimenti a lavori anteriori (di cui alcuni quasi inaccessibili ai più), minacciano di rendere la benefica influenza della sua opera assai più scarsa di quanto sarebbe presumibile e desiderabile.

L' opera del Simon si apre con una dotta *Introduzione* destinata alla questione « che cosa è la matematica? »; è una questione a cui egli dedicò poi un lavoro speciale (v. *Bollettino,* T. X. 1907, p. 118) ed a cui dà una risposta che riferiamo nell' originale pel timore di essere incapaci di rendere in italiano il concetto dell' autore: « die Mathematik ist die Wissenschaft der geordneten schöpferischen Verknüpfung und Trennung, konstruktiever Synthesis und Analysis » (p. 2).

Segue un Cap. contenente uno *Sguardo allo sviluppo storico dell' insegnamento matematico.* L'A. si limita a render conto di quanto accadde nella sua patria, descrivendo la considerazione crescente che seppe acquistarsi l'insegnamento della matematica; se un tempo aveva corso fra gli insegnamenti delle scuole medie la sciocca massima « mathematicus non est collega », a poco a poco si diffuse l' opinione che « privat se altero oculo qui ne-

(1) Tanto più che non sempre è rispettata l' ortografia dei nomi propri!

Digitized by Google

gligit mahesin ». Nello scrivere questo Cap. l'A. si giovò di numerosi lavori, molti dei quali dovuti ad insegnanti di scuole medie i quali spesero grandi fatiche ad illustrare gli istituti e le regioni ove trovavansi; se tale esempio fosse seguito in Italia, verrebbe lumeggiato un lato interessante della nostra storia, perchè si verrebbe a conoscere quali mutue dipendenze esistettero fra i sistemi d'istruzione usati nelle varie regioni in cui la patria nostra era divisa, nonchè quelle fra tali sistemi e quelli in uso presso le nazioni che vennero successivamente a dominare. Nell'attesa di tali invocati scritti, non si può fare un carico al Prof. Simon di non avere date notizie sull'andamento della istruzione matematica presso di noi; ma potrebbesi ragionevolmente lamentare che neppure la Francia e l'Inghilterra siano state da lui considerate, ove non fosse evidente avere egli tenuta sempre in vista, principalmente, se non esclusivamente, la sua terra natia.

Nell'esordio del Cap. II *(Metodologia generale)* l'A. rende omaggio ai suoi colleghi che, sotto la modesta forma di « Programmi scolastici », diedero preziosi contributi ai metodi d'insegnamento della matematica nelle scuole medie. Quel Cap. ha tali ricchezze e varietà di temi che ci è impossibile riassumerlo e dobbiamo limitarci ad un semplice indice degli argomenti toccati. Dopo di avere ricordata l'opera benefica dello Schellbach e segnalata la connessione esistente fra insegnamento medio ed insegnamento superiore, il Simon tocca la vieta questione dell'attitudine alla matematica e l'importantissimo problema della formazione di buoni insegnamenti secondari, sostenendo con valide ragioni la necessità (ormai generalmente avvertita) d'introdurre nel quadro degli insegnamenti universitari un corso sopra gli elementi della matematica ed uno sulla storia delle scienze esatte. Secondo lui quadruplice è lo scopo dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie, cioè: a) insegnare a ragionare esattamente, b) abituare alla critica ed al pensare con la propria testa, c) addestrare al concepimento delle leggi fisiche, d) porre in grado di produrre lavori originali. Saggi consigli sopra la scelta degli esercizi vengano collegati a giudiziose osservazioni intorno alla fantasia, dote è indispensabile al matematico; e per difendere la matematica dalla taccia di restare isolata, il Simon espone i legami che in parte esistono ed in parte si potrebbero stabilire fra essa e la religione, la storia, la grammatica, le scienze naturali (1), il disegno (curiosa ed istruttiva è la dichia-

(1) Il Simon osserva essere tuttora divisi i pareri sul posto da assegnarsi alla Cosmografia elementare, che alcuni collocano nella Fisica ed altri (come da noi il Vatilati) verrebbero ascritta alla Matematica.

Digitized by Google

razione da lui fatta che l'inabilità nel disegno fu a lui di grande ostacolo sulla cattedra!), la lingua natia e la filosofia. Segnaliamo anche le sue osservazioni sulla etimologia dei termini tecnici, sulla propedeutica geometrica (geometria intuitiva), sull'introduzione nell'insegnamento medio della geometria descrittiva e sul pericolo di estendere troppo i programmi, i quali però debbono seguire. sia pure da lungi, l'incessante progresso della scienza. Finendo l'A. fa menzione dei varii metodi d'insegnamento che furono proposti ed usati: euristico, genetico (Clairaut, 1753), dogmatico, analitico, sintetico, meccanico, dinamico.

Scrivendo « Nemo ad divinarum humanarumque rerum cognitionem accedat nisi prius artem numerandi bene addiscat », S. Agostino manifestò il sentimento generale intorno alla grande importanza per ogni classe di cittadini di apprendere il maneggio del *Calcolo numerico*. A tale ramo delle matematiche è dedicato il III Cap. dell'opera di cui ci occupiamo, capitolo riboccante di erudizione e di acute osservazioni; fra queste per brevità riferiamo soltanto la seguente: « un matematico di professione riesce difficilmente a capire lo scarso interesse che provano, anche gli alunni adulti, pel punto di vista puramente formale (dell'aritmetica) »; aggiungiamo che, fra le notizie concernenti lavori altrui, avremmo amato trovare almeno un cenno intorno alle memorie in cui il compianto Prof. A. Capelli ha sostenuta la convenienza di far precedere la moltiplicazione alla addizione.

All'*Aritmetica ed Algebra* sono consacrati i due capitoli successivi. Nell'uno notiamo che l'A. combatte il sistema di fare eseguire dagli alunni calcoli assai complicati, sostiene la necessità di svolgere la parte filosofica dell'aritmetica, limitandone la parte esclusivamente formale, facendo notare come l'aritmetica elementare offra l'unico esempio, accessibile alle scuole, di un tutto completo. L'A., a differenza del Prof. F. Klein, sostiene essere opportuno d'insegnare la risoluzione delle equazioni letterali di 3.° e 4.° grado, acutamente osservando come il caso irriducibile delle equazioni cubiche porga il primo esempio dell'inevitabile intervento dei numeri complessi in quistioni suscettibili di soluzione reale. Segnaliamo anche (fra molte altre cose), come riferentisi ad una questione d'attualità, le ragioni per cui l'A. si dichiara fautore dell'introduzione nell'insegnamento medio dei concetti fondamentali dell'analisi infinitesimale, ragioni che hanno per nocciolo due osservazioni; cioè, che essi si aggirano intorno all'idea di limite, la quale s'incontra in tutti i rami delle matematiche e che di regola, non sono i concetti

Digitized by Google

nuovi che riescono di difficile apprendimento, pei giovani ma sibbene i lunghi calcoli e gli algoritmi complicati. L'altro dei Capitoli consacrati all'Algebra ed all'Aritmetica è un semplice complemento ad un' altra opera del Prof. Simon, che i nostri lettori conoscono (v. *Bollettino,* T. IX, p. 104); il lettore noterà in esso la particolareggiata storia dei numeri complessi, la difesa del calcolo combinatorio contro la riduzione proposta dal cosidetto « Meraner Bericht », importanti sviluppi concernenti il teorema del binomio, ecc.

Anche alla *Geometria* sono consacrati due capitoli. Il primo dei quali (Cap. VI) si apre con l' affermazione antikantiana dell' essere la geometria (a differenza dell' aritmetica) una scienza essenzialmente sperimentale e con l' esposizione dell' idea che anche la geometria non - euclidea meriti un cenno nell' insegnamento. Seguono notevoli osservazioni intorno alle dimostrazioni geometriche ed al metodo euclideo, dalle quali emerge che il Simon è partigiano dell' introduzione nell' insegnamento medio del concetto di trasformazione (sì intieramente connesso a quello di funzione) e dell' uso di movimenti delle figure. A proposito delle ricerche recenti intorno ai principi della geometria, egli cita parecchi italiani, fra cui con sorpresa si trova E. Cesàro, mentre si cerca indarno M. Pieri. Lo studio dei vari metodi di costruzione delle figure, gli dà occasione di esporre le proprie idee intorno alla Geometrografia del Lemoine, mentre il gruppo di teoremi connessi a quelli di Pitagora gli porge il destro per manifestarsi in massima propenso alla fusione della planimetria con la stereometria. Rileviamo finalmente che a ragione egli ritiene la rappresentazione grafica delle funzioni invariabilmente connessa con il concetto di funzione, onde una non deve essere ammessa senza l' altra nell' istruzione secondaria. Nell' altro dei capitoli relativi alla Geometria il Simon svolge i concetti precedenti applicandoli all' insegnamento impartito secondo i programmi tedeschi; onde il seguirlo è per noi meno facile e per i lettori meno interessante; tuttavia la lettura attenta di quel Cap. VII va caldamente raccomandata a tutti gli insegnanti, che vi attingeranno ottimi consigli ed informazioni gustosissime: basti fissare l' attenzione di chi legge sopra l' elenco di opere a cui può ricorrere il professore desideroso di insegnare ai suoi migliori allievi qualche cosa di ciò che trovasi sul confine tra la matematica elementare e la superiore.

Nel seguente Cap. VIII il Simon ha radunate delle osservazioni generali di varie specie, di cui solo alcune trovano esclusiva applicazione nelle scuole tedesche: lavori in casa e sunti delle lezioni, calcoli numerici ed errori più frequenti, ausiliari

Digitized by Google

per l'insegnamento e ripetizioni, purismo nella scelta dei vocaboli e storia dei simboli in uso, ecco gli argomenti principali toccati; è necessario rilevare la loro importanza dal punto di vista didattico? . . . Ed è necessario fare lo stesso riguardo all'ultimo Cap., ove il Simon dà un ricco elenco di trattati e di collezioni di esercizii, accompagnato da giudizii intorno al loro valore? . . .

Giunti al termine della nostra rassegna, siamo costretti a riconoscere che, malgrado l'estensione inusitata da essa assunta, molte cose belle e buone dell'opera del Simon non poterono prendervi posto: sarà colpa in gran parte dell'imperizia del relatore, ma una piccola frazione va attribuita allo stile saltellante ed un pò faragginoso dell'autore. Da questa forma insolita non bisogna lasciarsi spaventare, chè, non solo l'insegnante, ma anche lo storico (1) trarrà importanti ammaestramenti dalle pagine testè analizzate del vivace e simpatico professore del Liceo di Strassburgo.

G. L.

A. Gutzmer. — *Vorschläge für die wisseschaftliche Ausbildung de Lehramtkandidaten der Mathemattk und Naturwissenschaften.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908, 8° p. 44.

Questa nuova prova dell'attività spiegata dalla Commissione incaricata dalla « Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte » di studiare tutte le questioni relative all'insegnamento scientifico, presenta uno speciale interesse, trattando una questione (la preparazione dei futuri insegnanti) che anche da noi aspetta una soluzione da tutti giudicata soddisfacente. Un sunto della pubblicazione in discorso essendo impossibile, quanto una compiuta analisi, ci limitiamo a segnalarla a tutti coloro che s'interessano ad un problema di politica scolastica per importanza a nessuno secondo.

G. L.

(1) Notiamo a questo proposito come l'A. segnali parecchie notevoli conferme dell'antica massima *nihil sub solem novi;* e cioè: 1.° i numeri transfiniti furono segnalati dal Cardinale Gerdil (1806) (p. V); 2.° assai prima del Lindemann (1904), F. F. Hähn (1747) consigliò un corso universitario di storia della matematica elementare (p. 6); 3.° il punto di Brocard s'incontra già in uno scritto (1826) di H. G. Beghagel (p. 128); 4.° le cocleoide si trova presso un quadratore del cerchio (1872) F. von Armin (p. 153); 5.° l'uso dell'angolo supplementare per dedurre nuove formule di trigonometria sferica risale a Cornelio Keogl (p. 167); 6.° la legge di permanenza delle leggi formali fu enunciata da G. H. Bubendey (1835) prima di Hankel (p. 113).

Digitized by Google

ZOEL G. DE GALDEANO. — *Exposición sumaria de las teorias matemáticas.* Zaragoza, E. Casañal, 1907, 8° p. 208. (Prezzo 4 pesetas).

— — *Algunas consideraciones sobre Filosofia y Ensenanza de la Matemática.* Id. id. di. 1907. 8°. 114 (Prezzo 2 pesetas).

In una futura storia della matematica in Ispagna al Prof. Galdeano sarà accordato un posto eminente, come colui che più d'ogni altro si adoperò nella seconda metà del Sec. XIX affinchè la patria del Murillo e di Cervantes collaborasse attivamente al progresso delle scienze esatte. Per sette anni egli si sobbarcò ad ingenti sagrifici per continuare la pubblicazione da lui intrapresa del noto periodico *El Progreso matematico.* Progettò poi una grande *Enciclopedia matematica* e ne pubblicò non meno di sei volumi, quelli cioè che concernono il *Calcolo differenziale*, i *Principii generali della teoria delle funzioni,* le *Applicazioni del calcolo infinitesimale allo studio delle figure piane,* il *Calcolo integrale,* le *Applicazioni del calcolo infinitesimale allo studio delle figure solide* e la *Teoria delle equazioni differenziali.* Altri tre volumi dovevano portare i seguenti titoli: *Riassunto e complemento della teoria dei numeri, Teoria dei gruppi di sostituzioni, Applicazione della teoria dei gruppi alla risoluzione delle equazioni algebriche.* Ma essendo mancato l'appoggio pecuniario chiesto al governo l'A. dovette rinunciare a compiere il suo lavoro e limitarsi a pubblicare il presente sommario di indole storico-bibliografica. Non ci sembra il caso di esporne un' analisi esauriente e tanto meno di segnalarne le piccole inesattezze che vi si notano; ma giudichiamo prezzo dell' opera riferirne quì brevemente l'Indice:

Cap. I. *La Matematica classica.* 1. Divisione connessa alla natura del soggetto. 2. Evoluzione cronologica della matématica classica.

Cap. II. *La Matematica moderna.* 1. Esclusione dei metodi combinatori. 2. L' evoluzione della geometria. 3. L'algebra nelle sue relazioni con la teoria dei gruppi. 4. L' evoluzione della teoria dei numeri. 5. Evoluzione della teoria delle funzioni reali. 6. Serie trigometriche. 7. Evoluzione della teoria delle funzioni di variabili complesse. 8. Geometria sovra una curva algebrica. 9. Evoluzione della teoria delle funzioni analitiche. 10. Evoluzione delle equazioni differenziali. 11. Teoria delle trasformazioni. 12. I calcoli simbolici.

Alla stessa nobile aspirazione di contribuire all' elevazione degli studi matematici in Ispagna è informata l' altra delle opere il cui titolo sta scritto in testa del presente articolo. Delle due parti di cui consta, l' una, intitolata *Filosofia*, ha una certa

Digitized by Google

analogia con il volume più sopra enunciato; ma però l'esposizione ivi fatta dell'evoluzione del pensiero matematico, è condotta meno coll'intento di dare notizia dei risultati ottenuti, che per istituire al riguardo delle considerazioni d'ordine generale, in base alle opere dei filosofi-matematici da Cartesio a Poincarè. L'altra parte, intitolata *Insegnamento,* concerne particolarmente la patria dell'autore, contenendo critiche a certi provvedimenti governativi recenti e molti dati di fatto per dimostrare l'inferiorità dell'organizzazione didattica della Spagna in paragone di quella adottata presso le altre nazioni. Riguardo ad essa non possiamo se non far voti che l'A. riesce vittorioso nella coraggiosa campagna che da un trentennio va valorosamente combattendo!

G. L.

Matematica elementare.

E. Dintzel. — *Einführung in die Funktionenlehre. Für Schüler der oberen Klassen Mittelschulen.* Wien, Selbstverlag des K. K. Ergherzog Rainer-Gymnasium, 1809, 8° p. 49.

O. Lesser. — *Graphische Darstellungen in Mathematikunterricht der höheren Schulen. Eine Sammlung von Material für die Hand des Lehrers.* Leipzig, Freytag; Wien, Tempsky, 1908. 8° gr. p. 108. (Prezzo Mk· 5 = K. 6).

È noto che in Germania (preso tale vocabolo nel senso lato che le attribuiscono i Pangermanisti) ferve la questione se ed in qual misura convenga introdurre nell'insegnamento medio il concetto di funzione e la rappresentazione grafica relativa. Alle discussioni che vi si riferiscono prendono parte insegnanti superiori ed insegnanti secondari, quelli adducendo argomenti teorici, questi presentando i risultati della loro personale esperienza. Ed appunto a due insegnanti di questa seconda specie che sono dovuti gli scritti che oggi segnaliamo a coloro che s'interessano ad una questione che la Francia ha già risoluto e che l'Italia si appresta a trattare.

L'A. del primo si dichiara contrario al definire la derivata come coefficiente angolare della tangente. Egli comincia (§ 1) dallo stabilire ed illustrare il concetto di funzione, indicando subito (§ II) la rappresentazione grafica usata anche nella fisica e nella pratica. Definito (§ III) il sistema di coordinate cartesiane, studia (§ IV) la funzione $ax+b$ (§ V), la sua rappresen-

Digitized by Google

tazione grafica, indicando (§ VI) le questioni di meccanica in cui quella funzione interviene. Passa poi alle funzioni del tipo $a x^2 + b x + c$ (§ VII), alla loro rappresentazione grafica (§ VIII) ed alle loro derivate (§ IX). Un § (il X) insegna alcune proprietà delle derivate, le quali vengono subito illustrate (§ VI) sopra le funzioni quadratiche; delle quali l'A. indica poi (§ XII) l'intervento nella meccanica. In un'*Appendice* viene applicata la teoria esposta alla risoluzione dell'equazione $ax - by = c$, questione che evidentemente equivale alla ricerca dei « punti interi » della retta $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

L'altra delle opere di cui ci occupiamo manifesta nell'A. l'opinione che alla rappresentazione grafica delle funzioni debbasi dare nell'insegnamento secondario un considerevole sviluppo; ma poichè non è destinata agli alunni, sembrando modellata sopra i « livres du maître » in uso in Francia, così può servire di ajuto anche a coloro che non dividono pienamente le vedute dell'A. Come esordio di essa si trovano molti diagrammi attinti alle scienze fisiche ed alla pratica. Nel Cap. I è esposto il concetto di coordinate cartesiane ortogonali, mentre nei tre seguenti esso è applicato allo studio della funzione lineare, delle funzioni algebriche e di alcune notevoli funzioni trascendenti. Il Cap. V tratta delle curve cicliche (cicloide, epicicloidi, ipocicloidi) ed il seguente delle celebri curve di Lissajous. Il Cap. VIII espone l'applicazione della geometria cartesiana alla risoluzione delle equazioni (indeterminate) di 1° e 2° grado con due incognite ed il seguente l'analogo problema relativo alle equazioni algebriche determinate. Nel Cap. IX si apprende la dipendenza tra una curva e la sua derivata, mentre l'ultimo deve ritenersi un tentativo di connettere la geometria analitica alla geometria descrittiva, giacchè tratta della rappresentazione grafica dell'intesezione di due quadriche, in alcuni casi semplici. In un'*Appendice* sono esposte alcune proprietà delle parabole di ordine superiori utili, nella risoluzione della equazioni numeriche. Un grande numero di belle figure ed una ricca collezione di svariatissimi esercizii aumentano il pregio dell'opera. La quale, se forse non può fungere da argomento diretto per la risoluzioue della questione accennata in principio del presente articolo, servirà di ottima guida all'insegnante che intende seguire la via tracciata nel noto « Meraner Bericht ».

G. L.

Digitized by Google

E. Borel. — *Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe besorgt von* P. Stäckel. I. *Band: Arithmetik und Algebra, Mit 57 Textfigurem und 3 Tafeln.* Leipzig, und Berlin, B. G. Teubner, 1908. P. XVI+431. (Prezzo del vol. leg. Mk. 8.60).

J. Tannery, — *Elemente der Mathematik; mit einem geschichtlichen Anhang von* P. Tannery. *Autorisierte deutsche Ausgabe von* Dr. P. Klaesse. *Mit einem Einführungswort von* F. Klein *und 148 Figuren im Text.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909. (Prezzo del vol. leg. Mk. 8).

Traduzioni in una lingua non nostra di opere non appartenenti alla nostra letteratura sono in generale destinate a destare in noi mediocre interesse. Ma quelle che oggi annunziamo ci sembrano meritevoli della nostra attenzione come nuove manifestazioni di quella campagna per lo svecchiamento dei programmi d'insegnamento nelle scuole secondarie che si va combattendo in Germania sotto la direzione del Klein. Tale movimento merita di essere seguito con interesse anche da noi, che stiamo cercando la via verso una riforma della scuola media, senza ancora deciderci ad un franco abbandono di idee e metodi che ormai fecero il loro tempo.

Delle opere che ora appajono in veste tedesca, l'una venne analizzata quando apparve, (v. *Bollettino,* VII, 1904, p. 80-82), l'altra è ancor più nota in Italia; chi infatti non ebbe tra mano i sei simpatici volumetti in cui il Borel ripartì la materia prescritta, dai programmi del 31 Maggio 1902 e 27 Luglio 1905, ai Ginnasii-Licei francesi? I primi tre di essi vennero fusi in quello che oggi annunciamo.

Riteniamo superfluo addentrarci in molti particolari relativi alle opere aununciate; osserviamo soltanto che, mentre l'opera del Tannery venne tradotta quasi letteralmente, quella del Borel nell'oltrepassare il Reno subì qualche sostanziale modificazione, affinchè riuscisse meglio addatta e più facilmente accetta al pubblico tedesco.

G. L.

Geometria costruttiva.

G. Müller. — *Zeichnende Geometrie.* Mit. XI Figurentafeln und meherern Abbildungen im Text. Sechste vermehrte Auflage. Stuttgart, Neff, 1901. 8.° p. XII+172 (Prezzo del vol. leg. Mk. 2.50).

Digitized by Google

L' introduzione della *Geometria intuitiva* nel quadro delle materie insegnate nelle nostre scuole medie divise per qualche tempo i matematici italiani in due campi, essendo gli uni favorevoli, gli altri contrari alla nuova disciplina. Le discussioni fatte non furono sterili, chè condussero alla conclusione che una propedeutica geometrica fosse, non solo utile, ma indispensabile. Dopo ciò la pace non venne ancora firmata, chè sorse dissenso sul significato da attribuirsi all' aggettivo *intuitivo,* che erasi accollato al nome della scienza di Euclide. Come tale, a mio credere, devesi scegliere quello adottato dal Prof. Veronese nelle sue *Nozioni di geometria intuitiva,* secondo il quale la geometria intuitiva aduna, in un tutto possibilmente organico, e spiega quelle proprietà delle figure geometriche che sono attestate dagli organi della vista e del tatto. Si tratta dunque di una scienza eminentemente sperimentale; e poichè le relative esperienze, almeno per quanto concerne la geometria piana, non possono effettuarsi se non disegnando, così in più di una occasione io ho caldeggiata la introduzione di un corso di disegno geometrico parallelo e connesso al primo insegnamento della geometria. Ora in qual modo si possa effettuare la fusione di tali due materie è ottimamente mostrato nel piccolo volumetto il cui titolo sta scritto in testa del presente articolo e che, non per colpa nostra, segnaliamo con grande ritardo ai nostri lettori.

I concetti informatori dell' operetta del Prof. Müller sono chiari leggendo le seguenti frasi della prefazione: « Nelle scuole in cui il disegno geometrico non forma una materia a sè, la fusione del disegno geometrico con la geometria piana è utile e naturale . . . Nell' azione reciproca fra l' intuizione ed il processo logico le verità geometriche vengono raggiunte, assimilate dallo spirito e formulate in teoremi ». In qual modo tali concetti sono svolti dall'A. si apprenderà (per quanto imperfettamente) dai cenni seguenti.

In una breve *Introduzione* vengono indicate la natura e l' uso degli strumenti di disegno e vengono insegnate le norme pratiche da seguirsi nelle costruzioni geometriche. L' A. entra poi in materia esponendo delle generalità sopra le figure geometriche, in particolare sopra il cerchio e gli angoli, con alcune semplici proposizioni relative; tutto ciò abilita al tracciamento di angoli soggetti a certe condizioni ed alla costruzione di triangoli determinati da un numero sufficiente di lati e angoli. Queste ultime questioni pongono in evidenza altre proprietà dei triangoli, in particolare i noti quattro casi di eguaglianza, e danno il modo di trattare graficamente altre questioni, quali la

Digitized by Google

costruzione di triangoli equilateri o isosceli, la bisezione di segmenti od angoli, il tracciato di parallele ecc. Similmente: alle nozioni sui quadrilateri seguono problemi concernenti la costruzione di tali figure; alle proprietà del cerchio, la risoluzione di problemi relativi a figure collegate ad esso, quali sarebbero i poligoni regolari; alle nozioni fondamentali sulle aree, la costruzione di figure rettilinee equivalenti ad altre e la loro divisione in parti dotate di proprietà assegnate; finalmente ai concetti ed ai teoremi su cui poggia la teoria della similitudine, una collezione ricchissima di bei problemi che si risolvono coll'aiuto di essa. Si vede pertanto che tutto il campo degli elementi della geometria è così percorso; l'insegnante che addotta i modi di vedere del Prof. Müller, potrà non seguirlo sempre, potrà cioè arrestarsi più a lungo in certi paesi e non fare alcuna sosta in altri, senza così abbandonare definitivamente la sua guida; e anche nei punti in cui se ne scosta, dovrà riconoscerne le doti non comuni (1).

L'*Appendice*, se non c'inganniamo, potrà difficilmente servire a chi insegua la geometria intuitiva, perchè concerne due classi di linee — le coniche e le linee cicliche — che sembrano riserbate a studenti di corsi superiori; ma il capitolo concernente le linee di second'ordine verrà assai gustato da chi cerca costruzioni semplici e svariate di siffatte linee.

Ci lusinghiamo che il fin quì detto ci giustifichi di avere in quest'occasione abbandonata la nostra abitudine di non diffondersi su lavori scolastici non recentissimi; il libro del Prof. Müller costituisce un tale argomento di fatto a favore di una tesi da noi sostenuta, che ci parve fosse opportuno farlo conoscere in Italia nel momento in cui presso di noi matura la riforma della scuola media.

G. L.

A. Adler. — *Theorie der geometrischen Konstructionn.* Mit 179 Figuren. 8.° p. VIII+301, Leipzig, Goëschen 1906. (Sammlung Schubert LII). (Prezzo del vol. leg. Mk. 9).

I problemi di geometria che numerosi s'incontrano negli *Elementi* di Euclide vennero introdotti coll'unico intento di non usare figure di cui non fosse stata in antecedenza assodata la costruibilità con riga e compasso. Essi vengono esposti di mano

(1) Tale libertà corrisponde alle vedute stesse dell'A., il quale stacca dal resto le dimostrazioni più complicate e le proposizioni meno ovvie, lasciando al senno dell'insegnante l'introdurle o meno nel suo corso.

Digitized by Google

in mano che si hanno elementi sufficienti per ottenerne una soluzione; il geometra greco non si preoccupa di sapere se la procedura suggerita sia la più semplice che guidi allo scopo, nè se la sua effettiva esecuzione sia vincolata a qualche ipotesi intorno alla disposizione dei dati. Solo più tardi nacque l'idea di trovare altre soluzioni di quei problemi, di restringere od allargare la cerchia degli strumenti concessi al geometra e di chiedersi se le costruzioni ottenute fossero sempre eseguibili; quest'idea, la cui portata si andò incessantemente accrescendo con lo sviluppo dei metodi grafici (geometria descrittiva, calcolo grafico, statica grafica), diede origine ad un complesso di indagini svariate, i cui risultati costituiscono una vera « teoria delle costruzioni geometriche ». E poichè tali risultati si trovano sparsi in pubblicazioni differentissime, ben fu ispirato il Prof. Adler a coordinarli nell'utilissima opera, di cui ci apprestiamo a dare notizia.

Nel I Cap. vengono esposti i principali metodi in uso per risolvere i problemi di geometria (piana). Nel II, seguendo Steiner, s'imparano le costruzioni con la sola riga che si effettuano quando siano date due rette parallele, un parallelogrammo, un quadrato od un cerchio *col proprio centro* (nota a questo proposito l'Adler, che, per eseguire le costruzioni ideate da Steiner, non basta supporre tracciato il cerchio, ma è indispensabile di conoscerne il centro). Il metodo di Mascheroni (« geometria del compasso »), completato dall'A. con la considerazione dell'inversione, è l'argomento trattato poi (Cap. III), mentre altre geometrie, basate sull'uso di altri strumenti (riga a due orli, squadra, ecc.), vengono fatte conoscere nel Cap. IV. Di indole più teorica sono i due seguenti, da cui si apprende la classificazione dei problemi geometrici, la risoluzione di quelli di 1° e 2° grado e le considerazioni (algebriche) che abilitano a giudicare della risolubilità o meno di un dato problema. Segue poi una succosa esposizione del problema della divisione del cerchio, accompagnata dall'effettiva costruzione dei poligoni di 5 a 17 lati, e quindi (Cap. VIII) si apprendono i principali metodi per risolvere i problemi della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo ad in genere di tutti quelli riducibili ad equazioni di 3° e 4° grado. Il penultimo Cap. contiene notizie storiche sulla quadratura del cerchio ed alcune rettificazioni approssimate della circonferenza e l'ultimo (il X) una compendiosa esposizione critica, accompagnata da numerose applicazioni, della *geometrografia* di E. Lemoine, lievemente modificata nelle sue basi dall'A.

Risulta da questi cenni come l'A. abbia saputo, nel breve

Digitized by Google

giro di trecento pagine, condensare tutto quanto oggi si conosce riguardo alla risoluzione dei problemi di geometria (piana), aggiungendo quà e là osservazioni sue proprie non prive d'importanza. Onde questo nuovo volume dello « Sammlung Schubert » forma un utile complemento agli ordinari trattati di geometria elementare ed un'ottima propedeutica alla geometria descrittiva.

G. L.

Teoria dei numeri.

H. Minkowski. — *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie.* 8° p. VIII+235. Leipzig, B. G. Teubner, 1907. [Prezzo del vol. leg. Mk. 8].

L'A. ha dato col presente volumetto una introduzione per quanto possibile elementare alle sue grandiose ed ammirevoli produzioni, le quali si possono considerare fra le cose più belle apparse in questi ultimi decenni nel campo della teoria dei numeri. Tale esposizione porge una chiara idea dei metodi propri della « Geometria nei numeri », le relative ricerche essendo limitate a quanto accade nel piano o nello spazio a tre o quattro dimensioni. Tali metodi sono profondi e potenti e pur tuttavia di sorprendente semplicità. La loro essenza riuscirà intelligibile a tutti coloro che, oltre le nozioni fondamentali di algebra e geometria, posseggono il senso del pensiero matematico.

Nel centro del libro (Cap. IV e V) sta, quasi costituente il principale scopo del tutto, un'esposizione dei fatti fondamentali della teoria dei numeri algebrici e degli ideali, illustrati particolarmente sull'esempio dei corpi numerici cubici. Tale esposizione abbraccia — partendo dal concetto di corpo di numeri o da quello di numero intero — lo studio del discriminante del corpo, la fissazione delle unità, inoltre l'introduzione degli ideali con le relative proposizioni concernenti la loro distribuzione in un numero finito di classi, e particolarmente la decomponibilità univoca di qualsiasi ideale in un prodotto di ideali primi.

È notevole che la totalità delle questioni che quì si presentano siano fra loro legate da un vincolo comune; giacchè tutte le dimostrazioni si fondano sopra la risoluzione del seguente problema:

Se $\xi_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad (i=1, 2, 3)$ sono tre forme lineari e coefficienti reali qualisivogliano, il cui determinante $D = (a_1\ b_2\ c_3)$ è $= 1$, si possono assegnare per x, y, z tre numeri razionali ed interi non tutti nulli tali che in conseguenza risulti $\xi_1 \leqq 1$, $\xi_2 \leqq 1$, $\xi_3 \leqq 1$? (Più generalmente: se $|D| > 0$, ma d'altronde qualunque, che risulti $|\xi_1 \xi_2 \xi_2| \leqq |D|$?).

Digitized by Google

Da ciò si vede come sia ben naturale che l'A. abbia posto in principio del suo libro la risposta affermativa a questa domanda e lo studio delle molte altre questioni che vi si connettono. Nel I Cap. egli dà una trattazione puramente aritmetica del teorema sopra le forme lineari, che riposa sopra un' idea dell'Hilbert, nonchè sopra un noto principio di Dirichlet. I Cap. II e III dànno notizia sotto una forma assai attraente dei metodi originalissimi scoperti dall'A., il cui nocciolo sta nelle proprietà dei corpi convessi. L'A. ha reso più agevole al lettore il penetrare nelle sue idee col far conoscere dapprima nel II Cap. i reticolati di numeri (« Zahlengitter ») nel piano e le più semplici proprietà delle curve piane convesse, per poi passare nel III Cap. ai reticolati numerici a tre dimensioni ed alla proprietà dei corpi convessi. Ciò corrisponde, avuto riguardo al suenunciato problema fondamentale, allo studio di sistemi di due forme lineari con due incognite x, y o risp. di tre forme con tre incognite x, y, z.

Tenterò ora di dare un' idea dei metodi della geometria dei numeri, entrando in qualche particolare relativo alla trattazione del sistema da ultimo nominato.

Nello spazio a tre dimensioni sia dato un reticolato foggiato a cubo. Attorno ad uno qualunque dei suoi nodi (« Gitterpunkt ») sia dato un corpo arbitrario convesso (mai concavo), avente quel punto 0 per centro (cioè per centro di simmetria). Le dimensioni di quel corpo convesso possono anzitutto sopporsi tali che esso non contenga nel suo interno o sopra la sua superficie altro nodo che il centro; ne sia I il volume. Ora se quel cubo viene dilatato in tutte le direzioni nel rapporto t : 1, finchè la sua superficie venga per la prima volta a passare per un nodo differente da 0, p. es. per P, bisogna anzitutto decidere se esista un limite superiore per quel valore M di t pel quale si verifica tale circostanza. La questione che così si presenta in altre parole si enuncia così: Qual è il limite superiore del volume M^3I di quel corpo convesso, che non contiene nel suo interno altro nodo tranne 0, ma che ha sopra la sua superficie almeno un altro nodo P? La risposta a tale questione si ottiene con un procedimento relativamente semplice. Si chiami *corpo M* il corpo convesso: che non ha nel suo interne altro nodo che il suo centro, ma che contiene sopra la sua superficie almeno un altro nodo P. Si chiami similmente *corpo* $\frac{M}{2}$ il corpo che corrisponde al rapporto di dilatazione $t = \frac{M}{2}$ e s' immagini attorno ad *ogni* nodo costruito un corpo nascente dal primo me-

Digitized by Google

diante una semplice traslazione. Allora tutti questi corpi non possono mai intersecarsi. P. es. i corpi $\frac{M}{2}$ di centri O e P possono avere comune il centro del segmento OP ed eventualmente toccarsi *esternamente* in tale punto, e soltanto quando la superficie del corpo contiene delle parti piane i corpi circostanti a O e P possono toccarsi esternamente longo una superficie piana. Per ciò i corpi $\frac{M}{2}$ copriranno nel caso estremo lo spazio semplicemente senza lacune, ma in generale non senza lacune. Ma se ora si considerano i corpi situati entro un grande cubo di centro O, le cui facce stiano in piani del reticolato considerato, si conclude agevolmente che dev' essere $\left(\frac{M}{2}\right)^3 I \leqq 1$ ossia $M^3 I \leqq 8$. In altri termini si ha il teorema fondamentale seguente: Un corpo convesso avente per centro un nodo del reticolato e di volume 8 contiene sempre, oltre il centro, almeno un altro nodo (nel suo interno o sopra la sua superficie).

Da questo teorema resta risoluto il precedente problema per tre forme lineari. S' interpretino, infatti, x, y, z come coordinate d' un sistema cartesiano, situato rispetto al reticolato in modo che O sia l'origine di tale sistema e che i valori interi di x, y, z corrispondano ai nodi del reticolato. Allora le sei equazioni

$$\xi_i = a_i\, x + b_i\, y + c_i\, z = \pm 1 \quad (\text{per } i = 1, 2, 3)$$

rappresentano sei piani, che formano un parallelepipedo (cioè un corpo convesso) di volume 8, supposto che il determinante $(a_1\ b_2\ c_3)$ sia $= 1$. Per siffatto corpo convesso si ha quindi $M \leqq 1$, ed esso contiene, oltre il centro, almeno un secondo nodo nel suo interno o sulla sua superficie, cosicchè per le coordinate di un siffatto nodo sussistono sempre le relazioni $|\xi_i| \leqq 1$ per $i = 1, 2, 3$.

Ma questo metodo geometrico va anche più a fondo. Giacchè mediante un' analisi più sottile, in determinate ipotesi, si può ottenere un limite inferiore per $M^3 I$ inferiore a 8. Così p. es. si vede che quei corpi per cui è proprio $M^3 I = 8$, devon essere poliedri, perchè i corrispondenti corpi devono riempire lo spazio senza lacune. Inoltre si può trovare un limite superiore pel massimo numero di nodi situati nell' interno o sulla superficie d' un poliedro M convesso e da ultimo si dimostra come, servendosi di una opportuna definizione analitica di corpo convesso, si possa affrontare la questione della *carica più densa* per infiniti corpi convessi. Nel libro che analizziamo tale questione è risolta per sfere ed elissoidi; e inoltre si di-

Digitized by Google

mostra come la soluzione per l'ellissoide sia collegata al problema della riduzione delle forme ternarie quadratiche.

L'ultimo Cap. tratta finalmente dei reticolati numerici nello spazio a quattro dimensioni, con applicazione ai sistemi di due forme lineari a coefficienti complessi e con variabili x, y che sono numeri interi del campo k $(\sqrt{-1})$ ossia k (j). Lo scopo di tali ricerche è l'approssimazione di quantità complesse qualunque, mediante applicazione dei numeri interi del corpo da ultimo nominato.

È chiaro che un libro come quello di cui è parola non ha bisogno di raccomandazione. Nessuno che voglia famigliarizzarsi con la teoria dei numeri può trascurarlo; ma ognuno deve tentare di appropriarsi i metodi ivi esposti.

J. Sommer (*)

Karnasch, Ingenieur Major a. D. — *Beweis für den Fermatschen Satz, dass die Gleichung* $x^n + y^n = z^n$ *in ganzen Zahlen nicht lösbar ist, wenn* $n > 2$. Berlin, Mayer & Müller, 1909, 4°, p. 7.

È anche questa una delle tante dimostrazioni venute in luce dopo che un appassionato delle matematiche (o un bello spirito?) ha legato un vistoso premio a chi conquisterà la rocca rimasta finora inespugnabile. Ma, a quanto ci sembra, neanche le batterie del maggiore Karnasch riusciranno a farne cadere le vecchie mura!

L'autore, partendo dalla supposta relazione:

$$x^n + y^n = z^n,$$

e facendo:

$$z = x + b = y + a,$$

coll'ipotesi $a > b$, ottiene con facili trasformazioni:

$$x - a = \sqrt[n]{nabh,} \qquad (1)$$

dove h è un polinomio di grado $n - 2$ in a, i cui coefficienti sono funzioni intere, a coefficienti razionali, di b e di x. Di qui egli deduce che, affinchè $x - a$ sia razionale, il radicando deve contenere il fattore a^n, e che perciò, siccome h contiene al più la potenza $(n-2)$—esima di a, b dev'essere divisibile per a.

(*) Traduzione autorizzata di un articolo pubblicato nall'*Archiv für Mathematik und Physik*, III Reihe, T. XV, p. 226-8.

Digitized by Google

È quasi inutile spendere parole per dimostrare l'illegittimità di tali conclusioni; anzitutto, se a non è primo, non è punto necessario che il radicando sia multiplo di a^n; in secondo luogo, anche se h è un polinomio di grado $n - 2$ in a, può essere (numericamente) divisibile per una potenza superiore di a.

E dopo ciò è superfluo continuare l'esame dell'opuscolo.

Del resto è facile costruire, per $n = 2$, esempi in cui la equazione fondamentale è soddisfatta senza che sussistano le condizioni date dall'autore come necessarie. Prendasi:

$$x = 21,\ y = 20,\ z = 29, \qquad (2)$$

quindi:

$$a = 9,\ b = 8.$$

La (1) diviene:

$$12 = \sqrt{2(-9)(-8)} = \sqrt{144};$$

il radicando non è divisibile per a^2, e b non è multiplo di a.

Alla fine dell'opuscolo l'autore dà come risoluzione generale dell'equazione di Fermat per $n = 2$ le seguenti espressioni, dove a, p sono numeri interi qualunque:

$$x = a\,[(p+1)^2 - p^2],$$
$$y = 2\,a\,p\,(p+1),$$
$$z = a\,[(p+1)^2 + p^2].$$

Anche questo risultato, come tutti sanno, è inesatto; così il sistema (2) non è compreso in queste formole. E questa è una riprova che dalle reti dell'autore molti casi possibili sono sfuggiti, e che la sua dimostrazione non è concludente.

G. Vivanti

Algebra elementare.

F. S. Palmieri. — *Elementi di aritmetica e algebra per le scuole medie di secondo grado.* Messina, Trimarchi, 1909. 8.° p. VII+631 (Prezzo L. 5).

Della prima parte del presente volume (C. 1-9, p. 1-329) abbiamo già fatto menzione in questo *Bollettino* (T. XI, 1909, p. 21). La seconda parte contiene la teoria dei numeri reali esposta secondo il metodo di Dedekind (C. 10-11), il calcolo approssimato dei radicali (C. 12), la definizione e le proprietà dei logaritmi (C. 13), dei numeri complessi (C. 14), delle progressioni aritmetiche e geometriche (C. 15), lo studio delle espressioni algebriche (C. 16) — massimo comun divisore di due polinomi,

Digitized by Google

polinomi isobarici, risultante, radici d'un numero complesso, teorema di D'Alembert — e delle equazioni algebriche (C. 17) — equazioni di 2°, 3° e 4.° grado, diseguaglianze di 2° grado, massimi e minimi, forme quadratiche, equazioni risolubili algebricamente, sistemi di equazioni —, l'analisi combinatoria con applicazione allo sviluppo binomiale, alla teoria delle sostituzioni ed al teorema di Abel-Ruffini (C. 18), e la teoria delle frazioni continue (C. 19).

Come risulta da questi cenni, il contenuto del libro oltrepassa quanto è strettamente necessario per lo svolgimento dei programmi delle scuole medie di secondo grado; ma l'autore dice di aver voluto dar modo ai giovani di attingere nella sua opera una conveniente preparazione per gli studi universitari di matematica.

Sarebbe stato comodo per chi legge che l'autore avesse corredato il suo libro di una lista di tutti i simboli usati coll'indicazione della pagina in cui se ne trova la definizione.

G. VIVANTI.

Programmi e Riassunti di Corsi Universitarii.

UNIVERSITÀ CLARK (Worcester Mass. U. S.) Estate 1909. Corso di tre conferenze tenute dal Prof. V. VOLTERRA.

I *Conferenza.*

Introduzione. L'Analisi e la Fisica matematica. Come la teoria di Maxwell sulla teoria delle tensioni in un campo elettrostatico sia racchiusa nella formola che dà la variazione d'un integrale triplo. Deduzione delle equazioni dell'elettrodinamica dal calcolo delle variazioni. Interesse ed applicazioni di tale deduzione; interpretazioni meccaniche; trasformazione delle equazioni dell'elettrodinamica; invarianti integrali e teorema di reciprocità; l'azione stazionaria e l'azione variata in fisica matematica. Necessità di estendere il concetto di funzione per estendere il concetto dell'azione variata; come si orientino in tale direzione le teorie precedentemente svolte. Le caratteristiche ed il tempo considerato come una coordinata. Il *mondo* del Minkowski. Interpretazioni delle caratteristiche. Caso di un mondo a 4, 3 o 2 dimensioni. Come il meccanismo delle onde sia differente nel caso dei differenti mondi isotropi. Mezzi bi-assi ed uni-assi. Loro differenza di fronte al meccanismo delle onde. Riduzione ed equazioni simmetriche. Introduzione degli immaginari nella Fisica matematica. Principio delle immagini. Ridu-

Digitized by Google

zione del Minkowski. La trasformazione del Lorentz. La contrazione del Lorentz. La contemporaneità degli eventi. Relazioni col principio dell'azione stazionaria e col calcolo delle variazioni.

II *Conferenza.*

La storia della Fisica matematica. Problemi antichi e problemi moderni della teoria dell' elasticità. Meccanica fisica e Meccanica analitica. Legge di Hooke. L' elasticità e la curvatura dello spazio; ricerche del Beltrami, difficoltà che s' incontrano. Problemi statici e problemi dinamici; tipi delle equazioni relative. Metodi per integrare le equazioni differenziali. L' evoluzione del metodo di Green. Ricerche del Betti e del Somigliana. L' equazione multipla di Laplace. Ricerche del Kirchhoff. Le polemiche sul principio di Huygens e gli antichi metodi di Poisson. Le caratteristiche. Le vibrazioni dei corpi elastici; ricerche del Tedone, del Love e del Somigliana. I corpi elastici a connessione multipla; relazioni con l' idrodinamica. Le distorsioni; le 6 distorsioni elementari di un cilindro cavo. Nuove trasformazioni del teorema di Green. Verificazioni sperimentali della teoria della elasticità; difficoltà relative; verificazione mediante le distorsioni e la birifrangenza accidentale; calcoli ed esperienze di Corbino e Trabacchi. Il premio Vaillant e la doppia equazione di Laplace; metodi antichi e metodi moderni. Ricerche del Lauricella, del Levi-Civita, dell'Almansi, del Boggio e dell' Hadamard. Il teorema d' esistenza; i metodi delle approssimazioni successive ed il teorema di Fredholm. I mezzi anisotropi ed il teorema di Green. Il metodo delle soluzioni semplici. I metodi antichi ed i fondamenti dei nuovi metodi dell' Hilbert e della sua scuola.

III *Conferenza.*

La legge di Hooke non è rigorosa. Lo stato d'un sistema dipende da tutta la sua storia precedente. Esempio dato dalla torsione di un filo. Distinzione fra la Meccanica dell' eredità e la Meccanica della non-eredità. Le quantità dipendenti da tutti i valori d' una funzione. Loro espressione analitica. Caso delle linearità. Le equazioni integrali ed i sistemi delle equazioni di primo grado. Il principio del ciclo chiuso ed i coefficienti della eredità. Principio dell' invariabilità dell' eredità. Oscillazioni dovute alla torsione. Le equazioni integro-differenziali. Caso generale dell'elasticità, tenuto conto dell' eredità. Equazioni dell' elettromagnetismo tenuto conto dell' eredità. Equazioni integro-differenziali che nascono in conseguenza. Distinzione in equazioni apparenti ed equazioni essenziali. Estensione del metodo di Green. Estensione dei metodi usati nella teoria dell' elasticità ai casi dei fenomeni dell' eredità. Metodi dell' analisi moderna.

Digitized by Google

NOTIZIE.

MUSEO DI STRUMENTI CHE ILLUSTRANO LO SVILUPPO DELLE MATEMATICHE. — Risulta dai materiali costituenti l'Esposizione di cui tenemmo parola p. 96 del T. XI del nostro *Bollettino*. Molti particolari sul contenuto di tale raccolta si trovano in un articolo pubblicato da Herbert T. Wade nel periodico *Scientific American* del 3 Luglio 1909 ed illustrato da parecchi riuscitissimi ed interessanti disegni.

***

MECENATISMO AMERICANO. — Un amatore delle scienze propose di recente un premio di 500 dollari all'autore di un saggio sopra la quarta dimensione. Tal premio fu aggiudicato al tenente-colonnello Graham Denby Fitch, il quale ebbe la soddisfazione, non solo di intascare una discreta somma, ma anche di veder pubblicato, oltre al suo scritto, il proprio ritratto e la propria biografia nel *Scientific American* del 3 Luglio 1909, quantunque poco o nulla abbia aggiunto alle nostre cognizioni sopra l'argomento.

***

PER LA STORIA DEL REGOLO CALCOLATORIO. — Alcuni recenti scrittori attribuiscono l'invenzione del regolo calcolatorio « rettilineo » ad Edmondo Gunter, altri a Guglielmo Oughtred, ma la maggior parte ad Edmondo Wingate. Ora il Prof. F. Cajori (in una memoria letta il 27 Agosto 1909 al Congresso dell'Associazione britannica per il progresso della scienza e di cui un breve sunto leggesi in *Nature*, 30 Dicembre 1909) si è proposto di mostrare come tale discordia provenga da non avere quegli autori ricorso alle fonti originali e di stabilire che Wingate non ha mai scritto sopra quell'argomento e che Oughtred è l'inventore del regolo calcolatorio, sia di tipo rettilineo che di forma circolare.

***

UNA NUOVA SOCIETÀ MATEMATICA. — Fu fondata a Calcutta ed ha cominciato a dare un pubblico saggio della propria vitalità coll'istituire un suo proprio organo *(Bulletin of the Calcutta mathematical Society;* Vol. I, N. 1, April 1909). Il fascicolo finora pubblicato contiene, oltre a documenti sociali, oltre lo spoglio di alcuni recenti giornali matematici e l'analisi di alcuni libri, i seguenti articoli originali: C. E. Cullis, *On a certain surface called the Möbius surface;* S. Mukhopadhyaya, *New method in the geometry of a plane arc;* G. Prasad, *On a non analytical potential function.*

Digitized by Google

***

Il primo centenario della nascita di E. Grassmann venne degnamente ricordato in Germania; F. Engel ne fece soggetto dell' orazione pronunciata nella grande Aula dell' Università di Greifswald in occasione del natalizio dell' imperatore tedesco, addì 27 Gennaio 1909 (v. *Jahresbericht der Deutschen Mathem-Vereinig.*, XVIII, 1909); e F. Müller il 15 Aprile 1909 ne tessè l'elogio Dresda in seno della Società « Isis » (v. Abhandl. der naturw. Ges. Isis, 1909).

***

Pubblicazioni recenti sulla Storia delle Matematiche.

J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen, *Eine neue Schrift des Archimedes.* Sonderabdruck aus der « Bibliotheca mathematica », 1907. (Si tratta di uno scritto recentemente scoperto dall' Heiberg in una biblioteca di Costantinopoli, nel corso delle indagini preparatorie per una nuova edizione delle opere del sommo Siracusano, scritto importantissimo per la luce che projetta sopra i metodi d' indagine degli antichi geometri).

F. Müller, *Leonhard Euler. Sein Leben und Wirken. Vortrag.* Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschafen; XIII Jahrgang, 1907.

K. Hering, *Das 200-jährige Jubilaum der Dampfmaschine*, 1706-1906. Eine historische-wirthschaftliche Betrachtung. Mit 13 Figuren im Text. Abh. zur Gesch. der Mathem., XIII Heft, 1906. (Dopo un breve capitolo dedicato alla preistoria della macchina a vapore, in questo interessante opuscolo viene narrata la vita di D. Papin e descritta la macchina a vapore da lui ideata nel 1706; si descrive poi il successivo sviluppo della macchina a vapore sino ai nostri giorni, per finire con dati statistici concernenti l' influenza e la diffusione di tale mirabile strumento).

F. Cajori, *Lessons drawn from the history of science.* School science and mathematics; February 1908.

V. Cerruti, *Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progrosso delle scienze.* Ann. di matem., III Ser., T. XV, 1908.

F. Amodeo, *Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nel Rinascimento* (XIII-XVI secolo). *Prolusione al Corso di storia delle Scienze matematiche fatta il 3 Dicembre 1907.* Giorn. di matem. T. XLV, 1908.

Digitized by Google

RECENTI PUBBLICAZIONI

BACHMANN, Niedere Zahlentheorie. I. Teil 402 pag. (1902) leg. lire 18.50. — II. Teil (Schluss): Additive Zahlentheorie, 480 pag. con fig. (1910) leg. Lire 22.25.

BARNARD a. CHILD, A new Algebra. Part. I-IV. L. 5.75.

BASSET, A Treatise on the Geometry of Surfaces. Lire 14.

BRIOSCHI, Opere matematiche. Vol. V (ultimo) 1910. Lire 30. vol. I a IV cad. Lire 25.

GRASSMANN, Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. 2 Bde. I. Bd. Binäres. Lire 16.

HADAMARD, Leçons sur le calcul des variations. Tome I (1910) L. 18.50.

HÖFLER, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Sammlungen didakt. Handbücher f. d. realist. Unterricht an höheren Schulen Bd I (1910) Lire 16.

KELVIN, Mathematical and Physical Papers Vol. IV: Hydrodinamics and general Dynamics. Lire 24.

KILLING u. HOVERSTADT, Handbuch d. mathemat. Unterrichts. I. Bd. Con 32 fig. nel testo; 456 pag. (1910). Lire 13.

KLEIN, Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare, redatte da F. Tägert e tradotte dal Prof. F. Giudice, con pref. del Prof. G. Loria (1896) L. 3.

KLEIN, Elementarmathematik v. höheren Standpunkte aus.

1. Teil: Arithmetik, Algebra. Analysis. 590 pag. autografe con fig. L. 10.

2. Teil: Geometrie 615 pag. autografe con fig. (1909) L. 10.

LANDAU, Handlbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 volumi (1909). L. 44.

LILIENTHAL, Vorlesungen üb. Differentialgeometrie I, Bd: Kurventeorie. Con 26 fig. nel testo di 370 pag. (1901) Lire 16.

LORIA GINO, Le trasfigurazioni di una scienza. Donne matematiche. (1902) 8° L. 2.

LORIA GINO, Metodi di geometria descrittiva. 16° (1909) L. 3.

LORIA GINO, Il passato ed il presente nelle principali teorie geometriche. III ediz. (1907) L. 8.

LORIA GINO, I poligoni di Poncelet. Discorso 8° pag. 50 (1889) L. 3.

Digitized by Google

LORIA GINO, Spezielle algebraische u transzendente ebene Kurven. Theorie u. Geschichte. Deutsch v. Schütte. II Anflage. I Bd: Die algebraischen Kurven. Con 141 fig. su 14 tavole litografate. 490 pag. (1910) L. 21.50.

LORIA GINO, Vorlesungen üb. darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte I: Die Darstellungsmethoden. Con 163 figure nel testo di 220 pag. (1908) L. 9.

RIQUIER, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1909) Lire 20.50.

SEGRE C., Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche: nota. (1889) L. 4.

SEGRE C., Le coppie di elementi immaginarii nella geometria proiettiva sintetica (1886) L. 4.

SEGRE C., Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito (1895) L. 4.

SEGRE C., Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario, ecc. (1885) L. 4.

SIMON, Geschichte d. Mathematik in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte (1908) L. 17.

STAUDE, Analytische Geometrie d. Punktepaares, des Kegelschnittes u. d. Fläche zweiter Ordnung. 1. Teil, 548 pag. con 181 fig. (1910) leg. L. 28.50.

STURM, Die Lehre von den geometrischen Verwandscaften. 4 Blnde

I. Bd: Die Verwandschaften swischen Gebilden 1. Stufe. 415 pag. (1908) leg. L. 21.

II. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden 2 Stufe. 346 pag. (1908) leg. L. 21.

III. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden III. Stufe. 584 pag. (1909) leg. L. 26.

IV. Bd: Die nicht linearen u. d. mehrdeut. Verwandschaften II. u. III. Stufe. 486 pag. (1909) leg. L. 26.

SYLVESTER, The collected mathematical Papers.

Vol. I 1837-1853 L. 24.

Vol. II 1854-1863 L. 24.

Vol. III 1870-1883 L. 24.

THIELE. Interpolationsrechnung (1910) L. 13.

Genova — TIPOGRAFIA FRATELLI CARLINI FU G. B.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XII — FASC. III.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1910

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

J. Lüroth, Julius Weingarten. Traduzione di un Discorso pronunciato ai suoi funerali. Elenco delle pubblicazioni di J. Weingarten. p. 65-70.

Meccanica (H. E. Timerding, C. Burali-Forti e R. Marolongo) p. 70-73.

Didattica (Symposium, D. André) p. 75-81.

Attualità (E. Lebon, W. Ahrens, Atti IV Congr.) p. 81-85.

Storia (E. Mach, Cajori, Cantor's Festschrift) p. 85-89.

Analisi (Burkhardt) p. 90-93.

Notizie. Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche p. 94-96.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XII — Luglio, Agosto e Settembre — 1910

JULIUS WEINGARTEN

Traduzione di un Discorso pronunciato ai suoi funerali

da J. LÜROTH (1)

Il grande matematico Giulio Weingarten, i cui resti mortali noi stiamo per deporre in seno alla terra, apparteneva al nostro Istituto (Università di Friburgo) dall' Estate 1905, quando egli surrogò un collega ammalato. Allora, dietro nostra proposta, egli fu nominato professore onorario ordinario ed in tale qualità fece un corso di lezioni nel semestre invernale 1905-1906.

Weingarten era nato a Berlino il 25 Marzo 1836 e nella sua città natale trascorse la maggior parte della sua vita. Ivi egli frequentò le scuole e studiò negli anni 1854-57. Superato l' esame magistrale, insegnò matematica in varie scuole. Nell' anno 1864 ottenne a Halle il grado di Dottore e nello stesso anno conseguì la libera docenza presso la « Bauakademie » di Berlino. Assieme a questo istituto, ove egli fu nominato professore nel 1871, passò nel 1879 nel nuovo Politecnico di Charlottemburg. Quì egli insegnò specialmente Meccanica, Teoria della elasticità con applicazioni ed Idrodinamica e fu assai apprezzato dai suoi ascoltatori. Nell' anno 1903 chiese ed ottenne di essere collocato a riposo, avendo vista negli anni precedenti la sua azione didattica intralciata dagli sforzi dei pratici per abbassare la teoria. Dopo essere stato pensionato, si trasferì a

(1) Con profondo cordoglio dobbiamo annunziare che l'illustre geometra, autore del presente articolo, é morto mentre questo si sta stampando (14 Settembre), sicchè al nostro *Bollettino* tocca in sorte il triste privilegio di chiudere la serie delle pubblicazioni dell'eminente Professore dell'Università di Friburgo. (G. L.)

Digitized by Google

Friburgo per trascorrere in questa sede tranquilla la sera della sua esistenza. Quando nell'Estate 1905 noi lo pregammo di assumere un insegnamento, si risvegliò in lui l'antico piacere di insegnare e per alcuni anni tenne lezioni, sopra temi connessi alle sue ricerche personali, che i suoi ascoltatori vantarono assai. Ma il crescere delle sue malattie lo costrinsero nell'Estate 1908 a sospendere le sue lezioni, quantunque queste gli avessero sempre procurato il massimo godimento.

Ai primi di Marzo del corrente anno egli sofferse di un colpo apopletico e non si è più ripreso. Difficoltà di parola e gravi dolori causati da disordini interni resero le sue condizioni così deplorevoli, che la morte, che lo colpì il 16 Giugno scorso, parve una liberazione.

Weingarten fu un matematico di primo ordine. I suoi lavori non sono molto considerevoli di numero ed estensione, ma sono estremamente densi di contenuto. Quasi esclusivamente essi si riferiscono alla Teoria delle superficie, alla Teoria dell'elasticità ed all'Idrodinamica. Non è quì il luogo di addentrarsi in un minuto esame di essi. Ma due punti vanno rilevati. I resultati che egli ha conseguiti nella teoria della superficie fecero noto il suo nome in tutto il mondo matematico. Non si può prendere in mano nessun trattato sopra la teoria delle superficie, direi anzi nessun lavoro relativo a tale disciplina, senz'incontrare il nome di Weingarten. Uno dei suoi lavori ottenne dall'Accademia di Parigi l'alta distinzione del « Grand Prix des sciences mathématiques ». Nell'Idrodinamica gli riuscì di correggere un errore che si trova in una delle più celebri memorie di Helmholtz.

Weingarten si mostra ne' suoi lavori pensatore originale ed acuto, pieno di chiarezza e precisione nella esposizione. Tali qualità egli esigeva anche negli altri e, quando mancavano, diveniva un critico acuto e temuto. Negli ultimi anni della sua vita se ne accorsero specialmente alcuni tecnici, nei cui lavori Weingarten trovò confusione ed errori.

Weingarten era un uomo simpatico, buono e nobile, senza pretese e pieno di spirito, un ottimo compagno in società; si attaccava agli amici ed era riconoscente per tutte le cortesie che riceveva. Egli possedeva inoltre una grande acutezza nel giudicare gli uomini ed una grande finezza nel conoscerli. I suoi amici serberanno di Weingarten un grato ricordo e penseranno con gratitudine alle molte ore suggestive passate con lui. Nella scienza egli ha elevato un perenne monumento, onde il suo nome non sarà mai dimenticato.

Digitized by Google

Elenco cronologico delle pubblicazioni di J. WEINGARTEN.

Abbreviazioni. — A. M. = Acta mathematica; A. M. P. = Archiv der Mathematik und Physik; A. N. = Astronomische Nachrichten; B. S. = Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin; C. R. = Comptes rendus hébdomadaires de l'Acad. de Paris; J. M. = Journal für die reine und angew. Mathem.; G. N. = Nachrichten der k. Ges. der Wiss. za Göttingen; Z. A. I. = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen; Z. M. P. = Zeitschrift für Math. und Physik.

1855.

1. Zur Theorie des Potentials. J. M. 49.
2. Elementare Herleitung der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels. A. M. P. 25.

1858.

3. Ueber Flächen von gewisser Krümmung. Z. M. P. 3.

1861.

4. Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. J. M. 59.

1862.

5. Allgemeine Untersuchungen über die geodätischen Linien und Vertikalschnitte auf krummen Oberflächen. In *Baeyer, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche*, Berlin 1862.

1863.

6. Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. J. M. 62.
7. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist. J. M. 62.

1864.

8. De lineis curvaturae superficierum. Inaugural-Dissertation, Halle a S.
9. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Leitern. J. M. 63.

1869.

10. Ueber eine geodätische Aufgabe. A. N. 73.

1870.

11. Ueber die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen. A. N. 75; *Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbureaus der europäischen Gradmessung, Heft 2.*

1877.

12. Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört. J. M. 83.

Digitized by Google

1881.

13. Zur Theorie der isostatischen Flächen. J. M. 90.

1882.

14. Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. B. S. 1882.

1883.

15. Ueber Differentialgleichungen der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden können. B. S. 1883.
16. Ueber die Eigenschaften des Linienelements der Flächen von konstantem Krümmungsmass. J. M. 94.
17. Zu der Abhandlung: Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von konstantem Krümmungsmass. J. M. 95.

1884.

18. Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. *Festschrift der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin.*

1885.

19. Note über die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels. J. M. 98.

1886.

20. Ueber die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. B. S. 1886.

1887.

21. Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. J. M. 100.
22. Zur Theorie des Flächenpotentials. A. M. 10.
23. Eine neue Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. G. N. 1887.
24. Ueber die durch eine Gleichung von der Form $X+Y+Z=0$ darstellbaren Minimalflächen. G. N. 1887.

1888.

25. Ueber eine Eigenschaft der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Funktion des anderen ist. J. M. 103.

1890.

26. Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = 0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitdbewegungen. G. N. 1890.

1891.

27. Sur la théorie des surfaces applicables. (Extrait d'une lettre à M. Darboux). C. R. 112.

Digitized by Google

28. Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. C. R. 112.

1893.

29. Sur une équation aux différences partielles du second ordre. C. R. 116.

1896.

30. Sur la déformation des surfaces. A. M. 20.
31. Mémoire sur la déformation des surfaces. *Mém. prés. par div. savants*, 32. (1)

1899.

32. Note zur Theorie der Deformation der Flächen. A. M. 22.

1900.

33. Bemerkungen zu einem nachgelassenen Manuskript von Gauss über die Abwickelung der Flächen. Gauss Werke, Bd. VIII, S. 448.

1901.

34. Die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivierten eines Systems dreier stetiger Funktionen des Ortes unterworfen sind und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelerzeugung. A. M. P. III. Reihe, 1.
35. Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi. *Rend. R. Acc. dei Lincei, V Ser. 10, I. sem.*

1902.

36. Ueber den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. A. M. P. III Reihe, 2.
37. Ueber einen Satz der Hydrodynamik. *Sitzungsber. der math. Ges. in Berlin.*

1903.

38. Ueber eine Aufgabe der Mechanik. A. M. P. III Reihe, 5.

1904.

39. Ueber die Lehrsätze von Castigliano. A. M. P. III Reihe, 8.
40. Ein einfaches Beispiel einer stationären und rotationslosen Bewegung einer tropfbaren schweren Flüssigkeit mit freier Begrenzung. *Verh. des III intern. Mathem.-Kongresses.*

1906.

41. Zur Theorie der Wirbelringe. G. N. 1906.

1907.

42. Zu der Abhandlung des Herrn Prof. A. Hertwig: Die Entwicklung einiger Principien der Statik der Baukonstruktionen. Z. A. I. 1907.
43. Zur Theorie der Wirkung der ungleichen Erwärmung auf

(1) Gli scritti N. 29 e 30 sono fra loro identici.

Digitized by Google

elastische Körper in Beziehung auf Fachwerke. Z. A. I. 1907.

44. Ueber die sogenannten allgemeinen Arbeitsgleichungen der technischen Festigkeitslehre. G. N. 1907.

1908.

45. Ueber den Begriff der Deformationsarbeit. Z. A. I. 1908.

1909.

46. Ueber das Clapeyronsche Theorem in der technischen Elastizitätslehre. Z. A. I. 1909.

47. Ueber den Begriff der Deformationsarbeit in der Theorie der Elasticität fester Körper. G. N. 1909.

Friburgo i. B. 18 Giugno 1910.

Meccanica.

H. E. TIMERDING — *Geometrie der Kräfte.* 8.° XII+381. Leipzig, B. G. Teubner 1908. (Prezzo del vol. leg. Mk. 16).

In questo libro il Prof. Timerding si è proposto di porre a lato della geometria del movimento e della geometria delle masse una geometria che, nella sua trattazione, abbia a base puramente il concetto di forza liberato da ogni concezione fisiologica o fisica o metafisica.

Nei primi capitoli di questo libro viene svolta la teoria dei vettori, prendendo origine direttamente dai lavori del Grassmann e dell'Hamilton, e l'applicazione di questa dapprima allo studio dei movimenti infinitesimi di un solido rigido e della loro composizione e di poi alla teoria della composizione dei sistemi di forze, essendo queste ultime concepite puramente come enti geometrici.

Dopo avere esposto nei capitoli 8, 9, 10 le nozioni della geometria della retta, il problema dell'equilibrio delle forze e la teoria dei movimenti elicoidali del Ball, l'autore nei capitoli 11, 12, 13, 14, 15 fà un elegante studio del cilindroide e dà la geometria dei suddetti movimenti elicoidali, ponendo in evidenza le relazioni che quest'ultima trattazione presenta colla geometria della retta.

Nei capitoli successivi si studiano le deformazioni infinitesime, argomento che dà luogo alla trattazione del complesso tetraedrale, ed infine, dopo una esposizione della teoria dell'equilibrio astatico e del problema di Minding, i movimenti liberi o vincolati dei corpi solidi, i momenti di inerzia e le forze elastiche.

La materia è in questo trattato molto bene ordinata e lo

Digitized by Google

svolgimento di ogni argomento è corredato di abbondanti indicazioni storiche e bibliografiche. L'autore, che presuppone noti ai lettori solamente i metodi della geometria analitica, ha reso un importante servizio a coloro che cercano una esposizione di quella parte della meccanica che, traendo origine dai classici lavori di Plücker, Varignon, Poinsot e Möbius, fa di questa una disciplina matematica indipendente dai concetti fisici e dalla nozione di tempo.

G. GUARESCHI.

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO. — *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica matematica.* — Bologna, Nicola Zanichelli, 1909; pp. V+174. (Prezzo L. 5) (1)

In questo trattato gli Autori espongono sistematicamente e e sotto forma *autonoma* i fondamenti del calcolo vettoriale. La *autonomia* consiste nel modo, affatto indipendente da qualsiasi prefissato sistema di riferimento, di concepire gli enti (numeri, punti, vettori, ...) e le operazioni fra gli stessi. Con frase, certamente non completa, ma alquanto espressiva si può dire che il lettore è portato attraverso le pagine di questo libro a pensare e ad operare vettorialmente.

Ed è certo che l'uso sistematico del calcolo vettoriale, laddove risponda alla natura delle questioni, realizza una notevole economia di pensiero e dona una granda agilità allo strumento formale.

I simboli adottati sono quelli già proposti ed ampliamente discussi dagli stessi Autori in cinque Note contenute nei tomi XXIII — XXVI dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

È da augurarsi che la diligente ed amorosa cura posta dagli A. in tale questione, provochi il buon volere dei cultori della meccanica e della fisica-matematica, onde si possa addivenire, una buona volta, ad un' unica intesa riguardo alle notazioni vettoriali.

Il libro è diviso in due parti. La prima parte tratta delle operazioni e funzioni vettoriali.

Vi si trovano definite in forma autonoma, ed applicate a

(1) *Nota aggiunta durante la correzione delle bozze.* — È uscita in questi giorni una traduzione francese del Sig. S. Lattès (Paris, Hermann 1910), la quale contiene una appendice sulle forme geometriche di Grassmann e sui quaterniani di Hamilton.

Digitized by Google

questioni trigonometriche e geometriche elementari, funzioni e operazioni vettoriali: dal prodotto vettoriale e interno (1), alle funzioni grad., div., rot. e una speciale funzione K, mediante la quale si può caratterizzare lo sforzo che si esercita sopra un generico elemento superficiale in un corpo continuo deformabile.

Le funzioni grad., rot., div. sono definite separatamente, e le loro strette relazioni vengono dedotte a posteriori.

Gli Autori molto probabilmente hanno dovuto seguire questo procedimento in base al criterio di autonomia che informa tutta l'opera, e sacrificare a questo l'introduzione dell'operatore hamiltoniano ∇ che, quantunque esiga un sistema di riferimento, racchiude in modo suggestivo in un unico simbolo le funzioni anzidette.

La parte seconda è dedicata ad applicazioni del calcolo vettoriale alla geometria, alla meccanica e alla fisica matematica.

In essa si trovano trattate alcune questioni che gli Autori dicono, nella prefazione, « di aver scelto fra quelle ben note, « appunto per mostrare l'enorme superiorità del calcolo vetto- « riale assoluto sugli antichi e indiretti metodi delle coordinate ».

Forse nelle applicazioni geometriche non si riscontra quel senso di misura e di opportunità della scelta dello strumento vettoriale, che informano le applicazioni che seguono (2).

Queste si raccomandano subito all'attenzione del lettore pel modo spigliato ed elegante con cui sono esposte.

Le formole per la cinematica e la meccanica di un corpo

---

(1) A proposito della definizione di prodotto interno o scalare, mi si conceda di esprimere una preferenza. Gli Autori definiscono « prodotto interno di **a** per **b** » e l'indicano con la notazione $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ il numero reale tale che, qualunque sia il vettore **x** normale a **b**, si abbia

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{x} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}) \wedge \mathbf{b}$$

dove l'operatore $\wedge$ significa « prodotto vettoriale ».

E ciò è perfettamente legittimo.

Ma non sarebbe stato altrettanto autonomo e certo più espressivo (nonchè indipendente dalla nozione di prodotto vettoriale) la definizione contenuta nella soluzione seguente

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{mod. } \mathbf{a}. \text{ mod. } \mathbf{b}. \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

che gli Autori stessi poi deducono (pag. 31, formula (6)) dalla loro definizione, come una delle proprietà fondamentali del prodotto interno?

(2) Tanto per citare un esempio: A pag. 84 si vuole costruire il centro di curvatura mediante i vettori P', P'' ed il punto P; il che significa, in altre parole, costruire il centro di curvatura della traiettoria di un mobile, in un generico punto P, nota la velocità e l'accelerazione, Mi sembra che (anzichè la costruzione ivi indicata) sia da preferirsi quella più semplice, ovviamente suggerita dalla ben nota proposizione: il valore assoluto della velocità è media geometrica tra la componente normale dell'acceleraziona ed il raggio di curvatura.

Digitized by Google

rigido, le equazioni vettoriali dell'equilibrio e dal moto di un fluido rendono il lettore veramente persuaso dei vantaggi notevoli che può recare un saggio impiego del calcolo vettoriale.

Altrettanto brillanti sono le applicazioni alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi ed alla elettrodinamica (1).

Il volume si chiude con delle note opportune che si riferiscono all'origine e alla storia delle notazioni adottate.

La fede e la costanza con cui gli Autori coltivano e diffondono il metodo vettoriale non possono non rendere simpaticamente accetta agli studiosi un'opera in cui, la ricchezza delle idee si accoppia alla scrupolosa esservanza del rigore logico.

Padova, Gennaio 1910.

U. Cisotti.

Didattica.

Symposium on mathematics for engineering studentes, being the proceedings on the joint sessions of the Chicago section of the American mathematical society and section A, mathematics, and section D, mechanical science and engineering, of the American association for the advancement of science held at the University of Chicago December 30 and 31, 1907. Reprinted from Science, vol. XXVIII, July, August and September 1908, 4.° p. 56.

Come riferisce Siegmund Müller nell'istuttivo suo scritto sopra *Die technischen Hochschulen in Nord-Amerika* (Leipzig, Teubner, 1908) negli Stati Uniti l'educazione degli ingegneri ha ricevuto una nuova ed importante orientazione. Mentre sin verso il 1885 aveva dominato il sistema inglese colla nota, soverchia stima per la coltura pratica, in seguito ottenne la debita considerazione il sistema didattico franco-tedesco con indirizzo scientifico superiore. « Venticinque anni fa », diceva nel 1900 il Prof. O. J. Baker, « i vecchi ingegneri pratici nutrivano dei forti dubbi sul valore dell'istruzione accademica e manifestavano la massima diffidenza contro gli studenti laureati nei politecnici. Oggi invece i direttori e gli ingegneri capi di opifici esigono da tutti i nuovi ingegneri una cultura accademica completa; la quale

(1) Mentre il rotor, al pari del prodotto vettoriale, è stato definito in modo *destrogiro* (o *sinistrorso*) (v. pp. 28 e 61), le formole dell'elettrodinamica sono poste nella forma di Maxwell e di Lorentz, che presuppone una definizione *levogira* (o *destrorsa*).

Digitized by Google

viene riguardata come indispensabile fondamento per qualsia feconda azione d' ingegnere ». Due cause produssero siffatto mutamento nel modo di vedere dominante. Anzitutto la tendenza dei Nordamericani alla riunione delle forze commerciali ed industriali. Nel seguirlo essi incontrano un unico ostacolo, cicè la mancanza di persone capaci di guidare un'industria colossale. Anche l'uomo più capace non può venire a capo in un compito siffatto, se, in tutti i rami della sua amministrazione, non ha a lato un gruppo di ingegneri indipendenti, in cui possa avere completa fiducia. In secondo luogo, il grande successo dell'industria e della tecnica americana proviene da ciò che si sogliono abbandonare senza rimpianti le antiche vie, si mettono alla prova volontieri nuovi procedimenti e si introducono subito quelli che l'esperienza mostrò buoni. Ma nuove strade esigono una padronanza assoluta delle teorie fondamentali epperò quelle cognizioni delle scienze tecniche che si ottengono soltanto pel tramite dei politecnici.

Siegmund Müller indica come notevole prerogativa dei Politecnici Nordamericani la trattazione libera e pubblica di tutte le questioni didattiche. È questo merito speciale della grande « Society for the promotion of engineering education », a cui aderirono i professori universitari. Ad esempio. nelle sedute di tale Società, si è svolta francamente la questione della partecipazione degli insegnanti universitari al lavoro pratico degli ingegneri. Inoltre essa si è adoperata a che nel Dicembre 1908 avessero luogo a Chicago, in occasione della riunione dell' « American Association for the advancement of science » (l' analoga della Società italiana per il progresso delle scienze) delle conferenze ben preparate, in unione all' « American mathematical Society » sull' importante questione della preparazione matematica degli ingegneri. « Queste letture, dice Wm. Magruder che presiedette alla loro pubblicazione », hanno importanza tanto per i matematici quanto per gli ingegneri. Il tono a cui furono informate tutte le discussioni, fu che è necessaria la partecipazione degli uni alle opere degli altri e la miglior conoscenza degli ideali e degli scopi di quelli e di questi ».

In Germania il « Verein deutscher Ingenieure » si sforza da tempo a che i rappresentanti dei vari indirizzi di studi nei Politecnici si apprendano a conoscersi ed a comprendersi; possa il presente articolo far sì che tale esempio venga seguito anche altrove!

Nelle quattro conferenze che furono tenute, la seconda — dovuta a A. Ziwet professore di matematica nell' Università di Ann Arbor (Mich.) — si riferisce a ciò che succede all' Estero, specialmente in Germania, mentre nella quarta — di R. S. Woodward, presidente della Carnegie Institution — riferendosi

Digitized by Google

alle considerazioni svolte dal precedente oratore, trovansi esposte osservazioni d'ordine generale sopra gli scopi dell'insegnamento matematico per gli ingegneri. Perciò basterà che qui si analizzino le altre due conferenze.

Nella prima E. J. Towsend, Professore di matematica nell' Università di Chicago, dà notizie sopra lo stato attuale dello insegnamento della matematica per gli ingegneri. Egli scelse per ciò, fra i più di cento collegi tecnici esistenti negli Stati Uniti, quelli che più si assomigliano ai politecnici tedeschi. Otto di essi hanno per unico scopo la formazione di ingegneri, mentre gli altri nove sono parti di intere università. Townsend parla successivamente della condizione di ammissione, della struttura dell'insegnamento matematico e della questione di chi deve impartire l' insegnamento.

A differenza di quanto succede in Europa, le scuole superiori americane esigono per l' ammissione la prova di certe cognizioni, ma non chiedono come esse siano state acquistate. Così nel « Massachusetts Institute of technology » (il primo istituto americano del genere, se si tien conto del numero dei frequentatori e dei risultati) nel 1903 furono ammessi per effetto di diplomi di « High Schools » (che corrispondono circa alle nostre scuole medie, licenziando i loro studenti a 18 anni) soltanto 231 studenti ed invece 401 in seguito ad esame; 104 aspiranti furono respinti non essendosi mostrati maturi agli esami d' ammissione. In tali esami la materia principale è la matematica e precisamente in tutti i diciasette istituti sunnominati si esige: algebra fino alle equazioni quadratiche inclusivamente, elementi della geometria piana e solida. Dieci di quegli istituti esigono di più per l'algebra; p. es. alcuni richiedono i logaritmi. Cinque domandano la trigonometria. Attualmente è generale ed energico lo sforzo di elevare le condizioni d' ammissione per potere bandire l'insegnamento della matematica elementare, che oggi assorbe tutto il tempo nel primo semestre. Soltanto nel secondo si trovano la Geometria analitica e la descrittiva. Nel terzo comincia l' analisi infinitesimale, che prosegue sino al quinto. I numeri seguenti, che si riferiscono alla « Massachusettes Institution », porgono un' idea del tempo dedicato a ciascuna materia: Algebra 30 ore, Trigonometria 32, Geometria analitica 60, Analisi infinitesimale 90 (per gli elettrotecnici 135).

Oltre agli insegnamenti obbligatori vennero di recente introdotti dei corsi facoltativi, sopra l' Analisi vettoriale, il Calcolo numerico, il Metodo dei minimi quadrati, ecc. Towsend esprime l' opinione che gli istituti più « rigorosi » procedano in tale via, per dar modo agli studenti dotati di attitudini matematiche,

Digitized by Google

di meglio addotrinarsi dal punto di vista teorico; e fa notare di quale e quanta importanza sia stato per la tecnica il fatto che uomini quali Steinmetz, Osborne Reynolds, Stodola abbiano goduto di un' ampia coltura fisico-matematica.

Per quanto concerne la tecnica dell' insegnamento, le esercitazioni sopra le teorie fondamentali devono essere accompagnate da applicazioni alla fisica ed alla tecnica, entro i limiti consentiti dalle modeste cognizioni degli studenti. Nessuno deve insegnare matematica nel senso in cui un abile meccanico contempla una macchina ben fatta, avente l' unico scopo di fabbricare altre macchine; ma, d'altronde, nessuno studente deve considerare la propria abilità matematica come un carpentiere contempla la propria pialla, cioè come un semplice strumento, per giungere a certi risultati.

Molti espressero l' opinione che l' insegnamento matematico per gli ingegneri debba essere impartito da ingegneri, mentre attualmente si trova quasi esclusivamente nelle mani di matematici. Townsend è d' avviso che così debba rimanere. Ed infatti, anzitutto, i giovani che si dedicano alla tecnica vogliono generalmente ottenere un ufficio pratico ed i pochi che hanno tendenza per le occupazioni meno lucrative del professore sono già assorbiti dalle materie tecniche. Conviene riconoscere che non tutti i matematici si mostrano addatti all' insegnamento per gli ingegneri; così gli analisti — che, come narra R. S. Woodward, impiegano molto tempo prezioso in lunghi sviluppi concernenti la convergenza e la divergenza delle serie infinite, per giungere a questo risultato che i loro scolari non si fidano più di applicare delle semplicissime formole approssimate — non sono certo idonei all'insegnamento in un politecnico. Si sceglieranno, quindi, soltanto quei matematici che hanno famigliarità con le applicazioni alla fisica ed alla tecnica. Ma, viceversa, si deve esigere che « i professori di scienze attinenti all'ingegneria rinfreschino di tempo in tempo le loro cognizioni di matematica superiore, affinchè i loro metodi siano all' altezza del livello scientifico del tempo, che il loro insegnamento sia conforme a quello che ebbero prima i loro ascoltatori, e che essi evitino certe espressioni da tempo bandite ».

Townsend osserva a ragione che il presentarsi di un ottima fioritura di professori di matematica per gli ingegneri nell'America del Nord venne favorito dal connubio dei Politecnici con le Università; ed esprime il desiderio che dappertutto le sezioni matematiche delle Università stiano in stretti rapporti con quelle relative alla fisica teorica cd alla scienza dell' ingegnere.

« Dal punto di vista dell' ingegnere la matematica è un

Digitized by Google

mezzo, non il fine », così Ch. F. Scott, ingegnere-consigliere della « Westinghouse Electric and Manufacturing C. », comincia il suo rapporto sull' insegnamento matematico per gli ingegneri. « La matematica è uno strumento, mediante il quale l' ingegnere determina il valore e le relazioni di forze e materiali. Ora quale strumento si usi dipende in primo luogo dal genere di lavoro che si fa, poi dalla natura degli strumenti di cui si dispone; e finalmente dall' esercizio che si possiede nel loro maneggio ».

Ora, per quanto riguarda il genere del lavoro, pochi ingegneri sanno servirsi della matematica come mezzo di ricerca. Un *referendum* fatto fra gli studenti che avevano ottenuto un grado nel Sibley College della Cornell University di Ithaca (N. Y.) ha mostrato che circa in una metà nelle loro occupazioni non applicano la matematica superiore. All' opposto il buon esito della azione spiegata dagli ingegneri che applicano le matematiche superiori, viene effettivamente determinato dalla loro abilità matematica.

Nella scelta di metodi matematici entrano in giuoco l'istruzione e l'attitudine; da ciò dipende se si preferiscono procedimenti grafici, numerici od analitici. Inoltre l' ingegnere applicherà esclusivamente quei motodi ausiliari sufficienti caso per caso; « un regolo calcolatorio gli riesce, nel suo quotidiano lavoro, infinitamente più utile di una tavola di logaritmi a sette decimali ». D' altronde non vi è nulla di peggio dell' affrontare un problema con mezzi inadeguati.

L' abilità è anche importantissima nella scelta degli strumenti. Al modo stesso che un abile lavoratore produce con un semplice strumento più di un altro che disponga di apparati più complicati, così il maneggio di semplici calcoli algebrici e di metodi grafici dà spesso più di lunghe formole analitiche e di sviluppi complicati. Donde risulta per l' insegnamento la condizione di curare assai gli esercizi nel maneggio delle proposizioni matematiche. Allo studente non si deve imporre di sapere a memoria molte formole, ma gli si deve insegnare a cercare nei libri le formole utili in pratica ed adoperarle a dovere una volta trovate.

Posti questi principi Ch. F. Scott si volge alla questione, quali argomenti matematici debbano venire trattati. Nelle scuole superiori non si deve tener conto di bisogni speciali, ma l'insegnamento deve adattarsi allo studente medio. Questo deve imparare quel tanto di matematica che basta a dimostrare le leggi e le formole fondamentali della scienza dell' ingegnere ed a leg-

Digitized by Google

gere e capire la relativa letteratura. Veramente in pratica di regola bastano i metodi della matematica elementare; ma quando si tratta di nuovi problemi l'ingegnere ha bisogno di conoscere i fondamenti matematici e fisici delle leggi dei fenomeni.

Il fine più elevato dell'insegnamento dovrebbe essere di far acquistare allo studente il senso matematico, cioè la facoltà di raggiungere il fondamento matematico dei problemi suggeriti dalla pratica, senza dimenticare nulla, d'interpretare i risultati del calcolo e dedurne conseguenze pratiche; giacchè quando manchi tale facoltà, l'applicazione della matematica non è sicura nè fruttifera. Ora se e come si raggiunga tale scopo dipende precipuamente dalla personalità dell'insegnante. Qui lo Scott si scaglia contro la venerazione, così diffusa in America, pei « text-books » che servono di fondamento alle lezioni; dai libri si può per fermo apprendere molto, ma i libri soli non bastano a fornire agli ingegneri l'educazione matematica.

A queste quattro conferenze tennero dietro, il secondo giorno del congresso, lunghe ed istruttive discussioni. Da ultimo, dietro proposta del Prof. D. F. Campbell dell'« Armour Institute of tecnology », fu deliberata la formazione di un Comitato di tre membri, da completarsi poi in modo da raggiungere il numero di 15, avente il compito di preparare, in base ai risultati della riunione di Chicago, un rapporto sopra l'istruzions matematica degli ingegneri, da presentarsi nell'Estate 1909 alla « Society for the promoting of engineering education ». A presidente della Commissione fu eletto il Prof. E. V. Huntington dell'University Harvard di Cambridge (Mass). Ma nel frattempo il IV Congresso di matematici tenutosi a Roma aveva deliberata la formazione di una Commissione internazionale per l'insegnamento matematico; in conseguenza quel Comitato decise di deferire alla sezione americana di quella Commissione la compilazione dell'anzidetto Rapporto e di limitare l'opera propria alla compilazione di una « Guida intorno ai principî ed ai metodi della matematica per gli ingegneri », da presentarsi nell'Estate 1910.

P. STÄCKEL.

D. ANDRÉ. — *Des notations mathématiques. Enumération, choix et usage.* Paris. Gauthier-Villars, 1909, 8.° gr. p. XVIII+501. (Prezzo fr. 16).

In un'opera giovanile di un grande matematico si legge il passo seguente: « Dans le calcul, il faut toujours choisir les notations les plus avantageuses; soit pour aider la mémoire, soit pour abréger les éliminations. Autant il serait ridicule de

Digitized by Google

faire consister dans de simples conventions, la majeure partie des Mathématiques, autant il serait exagéré de les en bannir entièrement. Ella détruisent quelquefois l'aridité du calcul et l'on pourrait dire que la notation est à l'Analyse, ce que l'arrangement et le choix des mots est à la clarté du style. Avec son secours les calculs les plus longs deviennent une somme de transformations semblables, et il ne faut plus pour achever le tout que la patience de répéter la partie principale. C'est avec de pareilles inventions que l'Analyse algébrique, si pénible dans son origine, est parvenue au point de donner des leçons de simplicité à la Géométrie » (G. Lamé; *Examen des diff. méth. employées pour resoudre les probl. de géométrie;* Paris 1818, p. 26).

Ed in un libro recente di un altro grande scienziato, pure francese, si legge: « dans les Sciences mathématiques une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles » (H. Poincaré, *Science et savants,* Paris 1910, p. 90).

La verità di tali osservazioni essendo patente, non può venir revocata in dubbio l'utilità di un'opera, come quella che oggi annunziamo, avente per intento di far conoscere tutte le notazioni usate nei vari rami delle matematiche e di porgere dei suggerimenti intorno al modo di sceglierle e di usarle in ogni occasione. Una tale opera, a parer nostro, dovrebbe contenere pochi precetti e molti esempi, attinti alle opere di forma classica, essere cioè ad un tempo grammatica ed antologia, giacchè (per usare le parole del Bertrand che si ritrovano sul frontispizio dell'opera di cui ci occupiamo) «l'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur génie ». Invece l'A. si è limitato (per restare nella precedente similitudine) alla parte del grammatico, epperò s'inspirò troppo al senso dell'altra frase che pose come motto della sua opera: « de quibusdam magni momenti minutiis ». Ed in realtà molti converranno con noi come in moltissimi casi egli si perda in particolari così minuti da giungere a dare suggerimenti, che potranno tornar giovevoli ad un compositore-tipografo, ma di cui il matematico non sa che fare; così è prevedibile che molte delle cose belle e buone, che si trovano sparse nelle 500 lunghe pagine da lui scritte, passeranno inavvertite dinnanzi all'occhio stanco del lettore annojato. Se ciò è indubbiamente deplorevole, altrettanto lo è che l'A. non abbia trattato a fondo, apportando alla loro soluzione il prezioso contributo della sua scienza e della sua esperienza, alcune questioni relative alle notazioni matematiche che diedero origine a discussioni e che ancora tengono divisi i matematici; siaci lecito citarne alcune:

Digitized by Google

I. Come si devono designare le potenze delle linee trigonometriche? P. es. il quadrato di sen x deve scriversi sen^2 x, come si fa di regola in Francia ed in Italia, oppure con sen x^2 come fanno in Germania i discepoli di Gauss, secondo i quali sen^2 x deve intendersi significare sen. sen x? — II. Come ovviare alle difficoltà segnalate dal Poincarè *(L' enseignement mathématique*, T. I, p. 106) provenienti dalle varie specie di *d* che si usano per designare le differenti specie di derivate e differenziali? — III. In Geometria descrittiva parecchi sistemi furono proposti ed usati per designare le coppie di tracce e di projezioni che intervengono nell'applicazione del Metodo di Monge; quale è da preferirsi? E' possibile trovare un sistema così soddisfacente da togliere ogni velleità di critica o cercare di stabilire un' intesa per arrivarvi?

Non è chi non vegga l' importanza di siffatte questioni, onde siam certi che sarà generale il rammarico constatando che l'André non volle fare alcun sforzo per giungere alla loro soluzione. Per converso egli si è creduto in diritto di pronunciare, con un tono da giudice d'ultima istanza, sentenze su cui molti per fermo sarebbero tentati d' interporre appello; valgano a provare ciò i due passi seguenti:

p. 278. Je trouve dans un autre (livre), pour les coordonnées d' une ligne unicursale, les équations

$$x = \frac{B}{A}, \; y = \frac{C}{A}$$

où A, B, C désignent des fonctions de t: ces trois lettres sont mal choisies, car, étant consécutives, elles semblent désigner trois objets analogues » (E non sono forse quantità analoghe tre funzioni algebriche razionali intere dello stesso grado e della stessa variabile?).

p. 279. « Un auteur représente les surfaces d'une certaine espèce par les équations paramétriques

$$x = \varphi(u) + \varphi_1(u_1), \; y = \psi(u) + \psi_1(u_1), \; z = \chi(u) + \chi_1(u_1)$$

qui sont triplement fautives (?!): il faudrait appeler les paramètres u_1 et u_2, les fonctions correspondantes $\varphi_1 \varphi_2$, $\psi_1 \psi_2$, $\gamma_1 \chi_2$: et, de plus, échanger entre eux les seconds membres des deux dernières équations, puisque l' ordre alphabétique des trois lettres grecques est φ, χ, ψ et non φ, ψ, χ ».

Non sappiamo per quale ragione l'A. sembra d'avviso (p. 412) che il valor 0 sia da escludersi da quelli da attribuirsi agli indici; contro lui stanno le opere di un maestro (O. Hesse), le quali sono da tutti considerate per veri modelli di eleganza;

Digitized by Google

sta il fatto che quando si vuol trattare mediante coordinate omogenee la geometria projettiva degli spazi lineari a quante si vogliono dimensioni giova indicare quelle coordinate con i simboli x_0, x_1, .., x_n, affinchè l'indice dell'ultima coordinata sia eguale alla dimensione dello spazio che si studia.

Malgrado la diligenza da lui spiegata nel raccogliere tutte le notazioni in uso, pure, come non è da stupirsi, dato il loro grande numero, che qualcheduna gli sia sfuggita; cosi nel suo libro non si trova cenno del metodo inglese per designare le funzioni trigonometriche inverse ($sen^{-1} x$ per arc sen x); cosi manca il segno di eguaglianza approssimativa che s'incontra in certe esposizioni della teoria delle approssimazioni numeriche, nè il segno usato per indicare che due figure sono « uguali e simili » usato da molti (p. es. dal Baltzer), ecc.

Senza arrestarci ad altre piccole osservazioni che potremmo fare, finiremo raccomandando a coloro cui manca tempo o voglia per leggere tutto il ponderoso volume dell'Andrè, di prendere almene cognizione delle assennate regole da lui formulate (p. 166, 170, 189, 191, ecc.) per ajutare chi deve eleggere le notazioni da usare.

G. L.

Attualità.

E. Lebon. — *Savants du jours. Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytiques des écrits.* Paris, Gauthier-Villars, 1er Juillet 1909, 8.° gr. p. VIII+80 (Prezzo fr. 7).

— *Savants du jour. Gaston Darboux, Biographie, bibliographie analytique des écrits.* Paris, Gauthier-Villars, 10 Janvier 1910. 8.° gr. p. VII+72 (Prezzo fr. 7).

— *Savants du jour. Emile Picard. Biographie, bibliographie analytiques des écrits.* Paris, Gauthier-Villars; 1er Juin 1910. 8° p. VIII+80 (Prezzo fr. 7).

Quando il 28 Gennaio 1909 Enrico Poincarè fu ammesso fra i quaranta immortali dell'Accademia francese faceva già parte di trentacinque accademie scientifiche; questo numero si è nel frattempo indubbiamente accresciuto, perchè tale è la fama da lui meritatamente conseguita che tutti i sodalizi scientifici del mondo da tempo vanno a gara nell'ascriverlo fra i propri membri. Ben a ragione, quindi, egli fu scelto per formare il

Digitized by Google

primo anello di una catena di biografie che una delle più celebri case editrici francesi ha intitolato « Savants du jour ». I tre volumi che ne annunciamo sono dovuti alle cure di una persona a tutti favorevolmente nota come cultore delle matematiche e della storia, e sono ornati di riuscitissimi ritratti del Poincarè, del Darboux e del Picard.

Il primo si apre con la riproduzione dell' allucuzione letta da F. Masson, il giorno dell' accoglimento solenne del Poincarè nell'Accademia francese. Segue l' elenco dei gradi, delle funzioni, dei titoli onorifici, dei premi e delle decorazioni che furono conferiti al celebre matematico ed una breve serie di titoli di articoli biografici di cui egli fu il soggetto. A questa parte di indole biografica ne segue altra esclusivamente bibliografica, in cui sono elencate le 336 pubblicazioni del Poincarè e distribuite sotto le rubriche seguenti: Analisi matematica, Meccanica analitica e meccanica celeste, Fisica Matematica, Filosofia scientifica, Necrologia,Pubblicazioni diverse. Ognuna è preceduta da giudizi sopra qualcuna delle manifestazioni dell'attività scientifica del Poincarè, tratti o dal *Rapporto* scritto dal Rados in occesione del conferimento del Premio Bolyai o da recensioni. La diligenza spiegata dal Lebon nel compilare questa lista (che sarà sempre consultata dai biografi del grande matematico francese) è, a tacer d'altro, dimostrato dal fatto che non gli sfuggirono neppure i contributi (nn. 10 e 11, p. 75) dati dal Poincarè alla risoluzione di una questione che per lunghi anni tenne agitata la Francia e che si leggono in due pubblicazioni d' indole giuridica, cioè: *Le procès Dreyfuss devant le Conseill de guerre de Reims* (Paris, 1900) e *Affaire Dreyfuss. La révision du procès de Rennes. Enquète de la Chambre criminelle de la Cour de Cassation* (Paris, 1908).

Il secondo elemento della stessa collezione è consacrato all' illustre scienziato che oggi degnamente ricopre la carica di segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Francia. Nato a Nîmes il 13 Agosto 1842, nell'operosissima sua esistenza, egli diede alla luce non meno di 419 scritti, che il diligente autore enumera, indicando anche i giudizii che vennero pronunciati su di essi da persone competenti. Ci sia lecito notare che, malgrado la cura spiegata nella ricerca, a lui è però sfuggita l'analisi fatta in queste colonne (v. T. I, 1898, p. 139) da E. Daniele del T. I della *Leçons sur les coordonées curvilignes et les systémes orthogenaux.*

Come era facile prevedere il terzo elemento della stessa collezione fu consacrato ad E. Picard. Anche di lui (nato il 24 Luglio 1856) sono indicate le date principali dell' esistenza e le

Digitized by Google

onorificenze di cui fu fatto segno; segue la bibliografia degli scritti ordinata nel modo seguente: Analisi matematica; funzioni e superficie algebriche; meccanica analitica e fisica matematica; filosofia scientifica e storia delle scienze; pubblicazioni varie. Superfluo avvertire che, come nei due volumi precedenti, per per ciascuna delle 341 pubblicazioni sono segnalate le recensioni relative ed i giudizi in altro modo pronunciati.

Non possiamo chiudere questi cenni che esprimendo il voto che questa raccolta così bene cominciata si accresca presto di molti nuovi elementi, non meno interessanti dei tre finora apparsi.

G. L.

W. Ahrens. — *Latein oder Deutsch? Die « Sprachfrage » bei der Heraufgabe der Werke Leonhard Eulers.* Magdebung, K. Peters 1910. 8.° p. 76 (Prezzo Mk. 1.60).

Il 7 Settembre 1909 rimarrà scritto fra le date memorabili nella storia delle matematiche, giacchè in quel giorno, a Losanna, venne deliberata la pubblicazione di tutte le *Opere di Leonardo Eulero*: così si è ormai certi che il voto, da un secolo ripetutamente formulato da matematici di tutto il mondo civile, sarà soddisfatto in un avvenire più o meno lontano. La progettata pubblicazione conterrà *la riproduzione diplomatica di tutti gli scritti editi ed inediti del grande analista di Basilea;* si adottarono così le abitudini seguite senza eccezione nel raccogliere le produzioni di tutti i grandi pensatori, in particolare nel preparare le edizioni definitive dei più celebri matematici. (Ricordiamo ad es. che tanto nelle Opere di Lagrange quanto in quelle di Jacobi e di Steiner si trovano delle pagine in italiano). Tuttavia, se si riflette come oggi molti cultori della matematica non abbiano ricevuta una cultura classica e come le scuole senza latino divengano ogni giorno più numerose e frequentate da coloro che si avviano per la carriera della scienza, sorge spontaneo il desiderio che che le Opere di Eulero siano accessibili a tutti, epperò appaiono in qualche lingua moderna. Esprimere tale desiderio ed esporre le ragioni che provano la possibilità di soddisfarlo, ecco lo scopo dell' interessante opuscolo che annunziamo; opuscolo di natura polemica, scritto con stile nervoso, ma riboccante di considerazioni serie e ben precisate, le quali mostrano che l'A., anche sotto la toga d'avvocato, non cessa di essere buon matematico. Varranno le sue argomentazioni e ottenere la revisione della sentenza? L'esperienza insegna che i casi in cui ciò succede sono estremamente rari, onde non si può avere fede che la storia sia per scrivere un' *affare Eulero* di seguito all' *af-*

Digitized by Google

fare Dreyfuss. Comunque al sig. Ahrens resta il grande merito di avere fatti valere, con coraggio ed energia, gli indiscutibili diritti che ha, al presente ed in avvenire, la legione di matematici che ritennero non essere Cicerone e Virgilio guide indispensabili per penetrare nei misteri dei numeri e delle figure.

G. L.

Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 Aprile 1908), *pubblicati per cura del Segretario Generale* G. Castelnuovo, 8.° gr, 3.° vol. Roma Tip. della R. Accademia dei Lincei; in commissione presso E. Loescher e C. — (Prezzo L. 35).

Ai quattro congressi internazionali di matematici che ebbero luogo negli anni 1897 (Zurigo), 1900 (Parigi), 1904 (Heidelberg) e 1908 (Roma) intervennero rispettivamente 242, 242, 396 e 688 persone. Gli *Atti* dei tre primi formano per ciascuno un volume di pagine 314, 242 e 766; mentre per l'ultimo essi formano tre poderosi volumi di complessive pagine 1122. In tali *Atti* le comunicazioni scientifiche ammontano rispettivamente a 32, 32, 78 e 125; essi contengono inoltre i testi delle conferenze generali che furono *due* nel primo congresso, *cinque* nel secondo, *quattro* nel terzo (oltre la commemorazione di Jacobi tenuta dal Königsberger) e *dieci* nell'ultimo (senza contare la *Relazione* relativa al conferimento della medaglia Guccia). Ora, se l'aritmetica non è un'opinione e la statistica non è una scienza traditrice, da questi dati sembra risultare che il successo di tali periodiche riunioni di dotti segue una linea ascendente, onde vanno ricordati con onore i matematici francesi Laisant e Lemoine che per primi misero all'ordine del giorno la loro organizzazione (v. *L'intermédiaire des mathématiciens*, T. I. 1894, p. 113) e così efficacemente si adoperarono a che venisse felicemente raggiunto un accordo internazionale sopra tale argomento; ed è facile prevedere che il venturo congresso (Cambridge, 1912) riuscirà non inferiore ai precedenti e varrà a rendere più vivi i rapporti fra i matematici inglesi ed i loro colleghi continentali.

L'importanza degli *Atti* dei tre primi congressi è nota a tutti; essi trovansi in tutte le biblioteche, pubbliche o private, al servizio dei matematici e sono spesso consultati e spesso citati. Ora, senza tema di smentita, ci sentiamo di asserire che la medesima sorte attende gli *Atti* del IV. È questa una proposizione che apparirà evidente a tutti coloro che parteciparono a quel convegno; ma per dimostrarne la verità agli occhi di tutti, sarebbe necessaria una completa analisi dei tre volumi che ci

Digitized by Google

stanno davanti. Essendo ciò impossibile, dati i limiti naturalmente imposti ad una recensione sintetica, ci limitiamo ad osservare come, in particolare, ad essi dovranno ricorrere tutti coloro che s'interessano a due questioni della cui soluzione vennero gettate le basi mediante un intesa internazionale; alludiamo all'unificazione delle notazioni vettoriali ed alla determinazione delle linee generali dell'invocata riforma dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie di tutti i paesi civili: possa la città in cui visse ed operò Isacco Newton veder compiuti gli edifici di cui i fondamenti furono felicemente gettati nella città eterna!

G. L.

Storia.

E. Mach. — *I principii della meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo.* Traduzione di Dionisio Gambioli. 8.° p. XIII+547. Roma-Milano Soc. ed. Dante Alighieri, 1909 (Prezzo L. 6).

L'alto significato di quest'opera venne da noi segnalato quando ne uscì la versione francese *(Bollettino,* VIII, 1905, p. 69-70); all'apparire di una traduzione italiana, contemporanea alla VI edizione dell'originale. crediamo opportuno riferire le pagine di prefazione postevi da Giovanni Vailati (le ultime scritte da questo esimio e tanto rimpianto pensatore!):

Il titolo che E. Mach ha voluto dare alla sua opera di cui si presenta la traduzione italiana « La meccanica esposta storicamente e criticamente nel suo svolgimento » indica già abbastanza per sè stesso che che la trattazione storica ha, in essa, il carattere, non di uno scopo, ma di un mezzo, o di un sussidio, per l'analisi critica delle teorie, e per la determinazione del loro significato e della loro portata.

Preoccupazione fondamentale del Mach è quella di distinguere quale parte nell'avanzamento delle conoscenze e nello sviluppo delle dottrine meccaniche, sia da attribuire ai vari processi mentali che vi hanno concorso: all'intuizione, sia essa istintiva e basata consciamente sulla memoria e sul confronto di esperienze antecedenti alle ricerche sperimentali dirette alla verifica o al controllo di date ipotesi preconcette, ai processi di generalizzazione e di unificazione miranti a far rientrare una sempre più grande quantità e varietà di fatti in un numero sempre minore di schemi teorici sempre più semplici, più coerenti e più comprensivi.

Digitized by Google

Dei principi e dei concetti fondamentali della meccanica egli tentò di ricostruire lo sviluppo embrionale, di riconoscere le influenze che essi ebbero a subire dall'ambiente in cui nacquero e si svolsero, di seguirli attraverso a tutte le fasi del loro svolgimento. I processi di adattamento che ne determinarono le trasformazioni successive, i contatti che si manifestarono tra i veri modi di descrivere, o spiegare, gli stessi fatti — le combinazioni, o interferenze dei vari schemi a cui si ricorse per rappresentarli — le azioni e reazioni che si esercitarono tra le teorie scientifiche propriamente dette e le speculazioni filosofiche — le ripercussioni teoriche delle applicazioni pratiche e tecnologiche — tutti gli episodi insomma che costituiscono il lato più interessante e istruttivo della lotta dell'uomo per l'acquisto del sapere, assumono, nell'opera del Mach, tutto quel rilievo e quella potenza di suggestione che ad essi può derivare dal trovarsi rappresentati ed esemplificati nel caso della più perfetta ed organica di tutte le scienze: di quella scienza che, tanto per la precisione e la portata delle sue previsioni, quanto per la varietà ed imponenza delle sue applicazioni pratiche, può riguardarsi come il modello di tutte le altre.

Un altro carattere fondamentale della esposizione del Mach è costituito da quello che si potrebbe chiamare la sua « concezione economica » delle teorie scientifiche.

Allo stesso modo come il possesso di concetti generali equivale alla capacità di « dimenticare artificialmente » davanti a dati fatti, tutte quelle loro particolarità, o caratteri, che non interessano per lo scopo che si può avere in vista, e di concentrare l'attenzione su quei lati o qualità loro che, per il momento, sono da riguardare come « essenziali », così avviene, secondo il Mach anche di ogni specie di teorie e concezioni scientifiche astratte.

Queste sono da lui riguardate come dei particolari « strumenti » per realizzare, nel modo più semplice, meno faticoso, più « economico », una corrispondenza sempre più esatta tra le nostre aspettazioni. o credenze, e i fatti a cui esse si riferiscono. Ed egli ritiene che, come il valore d'ogni strumento, così anche quello delle teorie sia da misurare dal servizio che ci rendono, dalla fàtica che ci risparmiano, dalla sicurezza e dall'estenzione dei risultati a cui esse ci portano.

Da questa sua concezione, per così dire pragmatica, del significato e del compito delle teorie e dei principi della meccanica, il Mach si trova naturalmente condotto a degli apprezzamenti di fondamentale importanza anche per ciò che riguarda i limiti della natura del contributo che i progressi delle cono-

Digitized by Google

scenze meccaniche possono apportare alla risoluzione dei problemi più fondamentali della filosofia e della teoria della conoscenza. Così, per esempio, la distinzione espressa ordinariamente col contrapporre le qualità « primarie » (estensione, figure, struttura, resistenza alla pressione o al moto ecc.) della « materia » — e col qualificare le prime come le sole che abbiano una esistenza « fuori di noi », e le seconde invece come puramente « soggettive » e dipendenti dallo stato dei nostri organi sensorii — è da lui riguardata come avente la sua sola base e giustificazione nel fatto che le qualità indicate come « primarie » sono più direttamente soggette che le altre a venire modificate per mezzo delle nostre azioni, cioè per mezzo dei nostri sforzi muscolari, mentre sulle altre noi non abbiamo presa alcuna, se non per via indiretta.

È nota, l'osservazione di Francesco Bacone, che l'uomo non può agire sulle cose se non trasportandole, deformandole, riunendole, separandole — agendo insomma su di esse « meccanicamento » e lasciando poi « ad esse » l'ufficio di fare il resto. Il Mach trova in questo fatto la spiegazione e la giustificazione della tendenza, che mostrano, in grado maggiore o minore, tutte le scienze, a dare, quanto più è possibile, alle proprie teorie una base « meccanica » e a tradurre le proprie leggi ed ipotesi in termini di moto, forza, di energia. La maggior soddisfazione che si trova ordinariamente, secondo il Mach, al fatto che i fenomeni studiati dalla meccanica rappresentano per il tecnico, qualche cosa di analogo a ciò che la moneta rappresenta per il commerciante: un mezzo cioè universale di scambio, la cui appropriazione basta a rendere possibile il conseguimento di ogni cosa desiderabile.

Riconoscere, di questa tendenza, la causa e l'origine, è riconoscere, nello stesso tempo, anche i limiti della sua proficua e legittima esplicatione. L'illusione che, nel campo economico, ha dato origine alle teorie « mercantiliste » trova qui il suo perfetto riscontro in quelle dottrine metafisisiche, che, come quelle per esempio adottate dai filosofi meccanicisti del secolo XVIII, riguardavano le leggi della meccanica come sufficienti a « render ragione » di tutti i fatti dell'Universo, e concepivano questo come capace di venire, qualche giorno, dedotto, come un teorema, o un corollario geometrico, da qualche ancora ignota formula relativa ai moti e agli urti di atomi e molecole.

Le costruzioni filosofiche di questa specie sono qualificate dal Mach con della pura « mitologia meccanica », non meno antropomorfica, per quanto in diverso senso, di quelle mitologie « animistiche » di cui ci è offerto esempio dalle cosmogonie antiche.

G. Vailati.

Digitized by Google

F. Cajori. — *Storia della Fisica elementare con l'evoluzione dei laboratori fisici. Tradotta in italiano dal dott.* D. Gambioli, *con tre Appendici sull'Accademia del Cimento, sui fisici matematici e sui fisici italiani dei tempi recenti, riveduta dal* Prof. A. Battelli. Bologna, Zanichelli, 1909, 8.° p. VIII+480 (Prezzo L. 12).

La fisica presenta legami così intimi con la matematica che il *Bollettino,* senza deviare dalla sua strada, ha l'obbligo di segnare questa nuova fatica del Prof. Gambioli; e per dare una idea di ciò che contiene il volume del Cajori ne riferisce qui un indice assai conciso:

I GRECI: La meccanica. La luce. L'elettricità ed il magnetismo. La meteorologia. Il suono. La teoria atomica. Causa dell'insuccesso delle ricerche fisiche dei Greci.

I ROMANI.

Gli ARABI.

L'EUROPA DURANTE IL MEDIO EVO: La polvere da cannone e la bussola. L'idrostatica. La luce.

IL RINASCIMENTO; Il sistema copernicano. La meccanica. La luce. L'elettricità ed il magnetismo. La metereologia. Il metodo induttivo nella ricerca scientifica.

IL XVII SECOLO: La meccanica. La luce. Il calorico. La elettricità ed il magnetismo. Il suono.

IL XVIII SECOLO: La meccanica. La luce. Il calorico. L'elettricità ed il magnetismo. Il suono.

IL XIX SECOLO: La luce. Il calorico. L'elettricità ed il magnetismo. Il suono.

L'EVOLUZIONE DEI LABORATORI DI FISICA.

APPENDICI.

G. L.

Festschrift Mortiz Cantor *anlässlich seines achtzigsten Geburtstag gewidmet von Freunden und Verehrern, herausgegeben* von S. Günther und K. Südhoff. Leipzig, C. C. W. Vogel, 1909, 8° p. VIII+204.

Il 23 Agosto 1909 M. Cantor ha compiuto il suo LXXX anno. Come manifestazione della gioia di annoverarlo tuttora fra chi è sulla breccia e come nuova attestazione della venerazione che lo circonda, un gruppo di estimatori ed amici, capi-

Digitized by Google

tanati da due fra i più assidui cultori della storia delle scienze, hanno messo insieme il volume che oggi annunziamo. Nel riferire l'elenco degli articoli che lo compongono, il *Bollettino* ripete all'illustre vegliardo l'augurio « ad multos adhuc annos » rivoltogli in quel giorno di festa da tutto il mondo civile:

P. Stäckel, *Curve variate in D. Bernoulli e L. Eulero.*

D. E. Smith, *Un antico libro di algorismo inglese.*

E. Wiedemann, *Opinioni di Muslime sopra la forma della terra.*

H. G. Zeuthen. *Sopra alcuni postulati di Archimede.*

H. Bosmans, *Lettera del P. Antonio Tommaso S. J. datata da Pechino, 8 Settembre 1688.*

G. Loria, *Per la storia della geometria descrittiva: T. Olivier.*

E. Gerland, *Gli operai nella storia della fisica.*

P. Müller, *La « Bibliothèque germanique ». il « Journal littéraire d'Allemagne » e la « Nouvelle bibliothèque germanique » come fonti per la storia della matematica nel secolo XVIII.*

F. Cajori, *Sulla storia del regolo calcolatorio.*

P. Mansion, *Il sistema delle sfere omocentriche come origine del sistema degli epicicli.*

P. Duhem, *A proposito d'un' opera di Giordano Nemorario.*

A. A. Björnbo, *Le traduzioni latine medioevali dal Greco di opere matematiche.*

K. Bopp, *Una dedica di Regiomontano al Cardinale Bessarione.*

A. E. Hass, *Le origini della fisica matematica.*

J. L. Heiberg, *Il così detto « liber geeponicus » di Erone.*

S. Vogt, *Sopra lo scritto (pseudo-) euclideo « de speculis ».*

H. Wieleitner, *Gli « Eléments de géométrie » del Padre P. G. Pardies.*

E. Wohlwill, *Sopra la storia della scoperta delle macchie solari.*

M. Simon, *I primi sei capitoli delle « Institutio arithmetica » di Nicomaco.*

A. Favaro, *Una lettera inedita di Galileo Galilei concernente il « Simplicio » dei « Massimi sistemi ».*

K. Sudhoff, *Osservazioni jatromatematiche su fogli di papiro.*

S. Gühnter, *Benemerenze di Eulero per la geografia fisica e matematica.*

G. L.

Digitized by Google

Analisi.

H. BURKHARDT. — *Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen.* Leipzig, Teubner, 1907. XI + 252 p. 8°. (Prezzo Mk. 6).

L' autore si è trovato di fronte al non facile problema di tenere un corso di Calcolo infinitesimale che dovesse servire insieme ai matematici ed ai naturalisti. Egli lo ha risolto anzitutto dal lato formale, dedicando un corso comune alle due classi di uditori, ed uno complementare pei soli matematici; ma restava la parte più difficile, scegliere e disporre la materia del primo dei due corsi, quello che forma il contenuto del presente volume. E più ancora della scelta della materia era importante quella del metodo. L' autore ha giudicato necessario fondare la sua esposizione unicamente sull' intuizione geometrica e fisica, indicando però i punti — ridotti al minimo numero — in cui essa non è sufficiente per una trattazione rigorosa, e riservandosi di sviluppare tali punti nelle lezioni destinate ai matematici. Egli prende dunque le mosse (C. 1) dal concetto di funzione quale risulta dall' osservazione dei fenomeni naturali, mostra come convenga scomporre questi in fasi elementari, e come da ciò nascano i due problemi fondamentali del Calcolo; stabilisce il concetto di velocità, definendo come tale il valore ottenuto ponendo $h = 0$ nell' espressione della velocità media relativa all' intervallo da t a $t + h$, e discute lungamente, tanto dal punto di vista della Matematica che da quello delle scienze sperimentali, l' obiezione relativa alla divisione per la quantità h che poi si pone eguale a zero. Dopo aver generalizzato il concetto di velocità, passa alla rappresentazione delle leggi naturali mediante curve, e reciprocamente delle curve mediante equazioni; definisce la tangente, e dalla considerazione degli enti *tangente* e *velocità* deduce per astrazione il concetto di derivata: la derivata $\frac{dy}{dx}$ è ciò che diventa il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ facendo in esso $\Delta x = 0$. Con ciò è evitata, almeno per ora, l' introduzione dell' idea di limite; e si possono senza difficoltà stabilire (C. 2, 3) i teoremi elementari del Calcolo differenziale e derivare le più semplici funzioni razionali ed irrazionali. P. es. la derivata di x^m si ottiene ponendo $h = 0$ nell' espressione:

Digitized by Google

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{(x+h) - x} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}\,x + \ldots. + (x+h)\,x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Come primo esempio d'integrazione (C. 4) l'autore presenta il problema della caduta dei gravi. Poichè la velocità nell' h — esimo secondo varia da (h—1)g ad hg, lo spazio percorso nei primi t secondi sarà compreso fra $\sum_1^t (h-1)g$ e $\sum_1^t hg$, cioè fra $\frac{g\,t^2}{2} - \frac{g\,t}{2}$ e $\frac{g\,t^2}{2} + \frac{g\,t}{2}$. Se invece del secondo si considerasse l' n — esima parte di esso, si otterrebbe con egual ragionamento che lo spazio percorso nei primi t secondi è compreso fra $\frac{g\,t^2}{2} - \frac{g\,t}{2\,n}$ e $\frac{g\,t^2}{2} + \frac{g\,t}{2\,n}$. Ora, poichè n può essere grande a piacere, si conclude che lo spazio cercato è $\frac{g\,t^2}{2}$.

A questo risultato si puo giungere assai più semplicemente, ci insegna l' autore, considerando che la velocità è la derivata dello spazio; per determinare quest' ultimo elemento, non v' ha che a cercare qual è la funzione avente per derivata la velocità, la quale nel caso attuale è g t: una tale funzione è appunto $\frac{g\,t^2}{2}$. L'autore mostra che il problema dell' integrazione ammette infinite soluzioni, stabilisce i teoremi più semplici del Calcolo integrale, interpreta l' integrale definito come un' area piana e dà la formola detta dei trapezi per il calcolo approssimato delle aree. Definisce poi (C. 5) il logaritmo naturale mediante l' integrale $\int_1^x \frac{d\,\xi}{\xi}$ e ne dimostra le proprietà caratteristiche; studia la funzione esponenziale, ed integra nei casi più semplici le funzioni razionali fratte, facendo poscia l' applicazione delle teorie svolte ad alcuni problemi di Chimica fisica. Il teorema di Rolle (C. 6) viene dimostrato intuitivamente; una dimostrazione analitica esigerebbe, come osserva l'autore, una definizione esatta della continuità, che egli vuol evitare. Dal teorema di Rolle si deduce il teorema della media, e quindi, previa la definizione

Digitized by Google

delle derivate d'ordine superiore, le formole di Mac-Laurin e di Taylor; queste hanno origine dal problema di determinare una funzione razionale intera di grado n che coincida insieme alle prime n derivate colla funzione data e colle sue derivate in un determinato punto. Dopo alcuni sviluppi sulla risoluzione approssimata delle equazioni e sulle formole approssimate in generale, l'autore trova il resto dello sviluppo di Mac-Llaurin, e calcola l'errore massimo per alcuni esempi. Segue la teoria dei massimi e minimi e quella delle espressioni indeterminate. Anche in rapporto a quest'ultima non si ricorre affatto al concetto di limite, sebbene si faccia uso della notazione

$$\lim e^x = \infty \text{ per } x = +\infty$$

e d'altre analoghe; p. es. il vero valore di:

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

per $x = 0$ si calcola moltiplicando ambi i termini per $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$; quello di:

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{e^x + e^{-x} - 2}$$

sviluppando le esponenziali secondo la formola di Mac-Laurin. Della regola detta di L'Hospital non si fa alcun cenno, mentre sarebbe stato assai facile dimostrarla anche partendo dalla definizione di derivata adottata dall'autore. Il C. 7 è dedicato alla interpolazione, che viene largamente sviluppata col corredo di esempi numerici; un complemento di esso è la breve appendice alla fine dell'opera che tratta dell'interpolazione mediante esponenziali.

Nel C. 8 si riprendono le formole di derivazione, considerandole dal punto di vista del calcolo degli infinitesimi; giustamente fa notare l'autore che agl'infinitesimi ricorre utilmente tanto il fisico che il geometra. Il C. 9 tratta brevemente delle funzioni di due variabili. Finalmente il C. 10 si occupa delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse; definite nel modo ordinario e rappresentate geometricamente le funzioni trigonometriche, l'autore, per ottenere la derivata di sen x, ricorre alla diseguaglianza:

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Digitized by Google

dalla quale risulta che per x abbastanza piccolo $\frac{\text{sen } x}{x}$ differisce da 1 tanto poco quanto si vuole, sicchè per mantenere la continuità deve porsi:

$$\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)_{x=0} = 1.$$

Dopo ciò si ha:

$$\frac{\triangle \text{ sen } x}{\triangle x} = \frac{\text{sen } (x+h) - \text{sen } x}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

e quindi:

$$\frac{d \text{ sen } x}{d x} = \cos x.$$

Qui, dice l'autore, la derivata non è più ciò che diventa il rapporto incrementale per $h = 0$, ma il valore a cui si avvicina indefinitamente il rapporto incrementale al diminuire di h. Segue la derivazione delle altre funzioni trigonometriche e delle loro inverse, l'integrazione della funzione:

$$\frac{g x + h}{a x^2 + 2 b x + c},$$

dove $a c - b^2 > 0$, e infine l'interpolazione trigonometrica e lo studio del moto oscillatorio.

Abbiamo creduto opportuno trattenerci un po' a lungo sull'opera di Burkhardt, perchè, a nostro avviso, essa reca un notevole contributo allo studio del problema della preparazione matematica dei naturalisti. Il problema è di grande importanza, e non può essere opera d'uno solo risolverlo definitivamente; ma portare elementi alla sua soluzione può e deve essere opera di quanti matematici s'interessano al perfezionamento delle scienze d'osservazione, che, come ben fu detto, va di pari passo colla loro trasformazione in scienze quantitative.

G. Vivanti

Digitized by Google

NOTIZIE.

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE.

A. KRAZER, *Zur Geschichte des Umkehrungsproblem der Integrale. Festrede bei dem feierlichen Akte des Rektoratswechsel an der Grossherz. Tech. Hoohschule zu Karlsruhe, 18 Nov. 1908.* (Dopo avere una nuova volta narrata la storia dell' invenzione delle funzioni ellittiche da Fagnano ed Eulero sino ad Abel e Jacobi, l' oratore espone le principali fasi di sviluppo della teoria delle funzioni iperellittiche ed abeliane, facendo in particolare emergere le straordinarie benemerenze di Riemann).

H. BOSMANS, *Note sur les papiers de l'astronome Wendelin conservés aux Archives générales du royaume a Bruxelles.* Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles, 1908.

H. BOSMANS, *Sur une tentative d'édition des Oeuvres complètes de L. Euler faite à Bruxelles en 1839.* Louvain 1909 (Interessanti notizie intorno all' organizzazione della nota edizione francese dell' opere di Eulero ed ai relativi manoscritti tuttora inediti, le quali presentano uu interesse particolare oggi che la questione di un' edizione completa di Eulero è all' ordine del giorno).

G. VIVANTI, *Sullo stato attuale della teoria delle funzioni intere trascendenti.* Atti della Soc. italiana delle Scienze, Firenze 1908. (Questa dotta e interessante memoria si chiude con un utilissimo indice bibliografico che abbraccia 203 numeri).

G. VASSURA, *Notizie sopra il carteggio scientifico di Evangelista Torricelli.* Comunicazione letta alla I Riunione annuale della Società italiana di Storia critica delle Scienze mediche e naturali. Faenza 1909.

H. G. ZEUTHEN, *Quelques traits de la propagation de la science de génération en génération.* Rivista di scienza, Vol. V, 1909.

F. AMODEO, *Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche.* Rend. Acc. Lincei, V Ser., Vol. XVIII, 1.° Sem. 1909. (L'A. intende mostrare in questa nota come i meriti di B. Cavalieri nella teoria delle coniche siano maggiori di quello che fu ritenuto da M. Chasles ed altri storici della geometria; per connessione di argomento fa rilevare il grande valore della *Geometria degli indivisibili,* osprimendo l' avviso che « il metodo di Cavalieri . . . si potrebbe far rivivere tal quale per adottarlo nell' insegnamento di quelle scuole ove non è possibile insegnare il calcolo differenziale, come per esempio le scuole professionali medie ». Ora va

Digitized by Google

rilevato che questo modo di vedere è così giusto che venne, non solo manifestato ma anche tradotto in atto da tempo in Germania come lo prova la *Genetische Stereometrie* dell'Heinze (Leipzig, Teubner, 1886) e gli *Elemente der Stereometrie* (Leipzig, Goeschen, 1900) di G. Holzmüller).

P. Boutroux, *Les origines du Calcus des probabilités.* La Revue du Mois, 10 Juin 1908. (Breve articolo ove sono esposti i tentativi per fondare il calcolo delle probabilità dovuti a Luca Paciniolo, Tartaglia, Cardano e Caramuel, prima che Pascal e Huygens ne scoprissero le basi definitive).

M. del Gaizo, *Giovanni Alfonso Borrelli e la sua opera « de motu animalium »* Atti della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, 1908. (Discorso fatto in occasione del terzo centenario della nascita del celebre medico-geometra, il quale nacque a Napoli il 28 Gennaio 1608).

M. del Gaizo, *Evangelista Torricelli e Giovanni Alfonso Borrelli. Appunti raccolti nel compiersi il terzo secolo dalla loro nascita.* Riv. di Fis. Mat. e Sc. nat., Aprile 1908.

P. Mansion, *Gauss contre Kant sur la géométrie non euclidienne.* Louvain, 1908. (Questa comunicazione anti-kantiana venne presentata il 3 Settembre 1909 al Congresso filosofico di Heidelberg e, a quanto sembra, destò le ire degli adoratori del celebre filosofo di Könisberg; ma i matematici, che la leggeranno in appendice all' VIII Vol. della III Serie di Mathésis, potranno trarne nuovi argomenti per ammirare Gauss, come colui che, con intuito chiaro e profondo, vide la strada capace di condurre alla scoperta della natura delle verità primordiali della geometria).

A. Favaro, *Per la storia del compasso di proporzione.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXVII, 1908. (Questa nota, provocata da un quesito posto dall'Enestrom, chiudesi con le seguenti conclusioni: « Il compasso di proporzione deriva da quello di riduzione del quale nessuna traccia venne sinora trovata anteriore al Comandino; dal tipo creato dal Marchese Guidobaldo del Monte è assai verosimilmente derivato il Compasso geometrico e militare di Galileo e con esso quello di tutti i suoi imitatori. Non si può garantire che dalla medesima fonte derivasse il « rigo » di Fabrizio Mordente; ma è difficile sostenere che dagli strumenti del Mordente non abbia tratta la inspirazione il Coignet per la sua « Regula pantometra »).

H. Bosmans, *La « Practicgve om te leeren cypheren » de Nicolas Petri de Deventer.* Annales de la Société scientifique de Bru-

Digitized by Google

xelles, T. 32, II Partie, 1908. (Le date di nascita e morte del protagonista di questo studio sono ignote, soltanto si conosce la data - 1567 - della sua prima pubblicazione ed esistono dei suoi ritratti fatti negli anni 1583, 1596, 1603. Egli non fu scienziato originale ma un abile espositore di ritrovati altrui; e avendo scritto in fiammingo potè esercitare grande influenza sopra i suoi conterranei, di regola ignari del francese e del latino; se non totalmente, in parte almeno, si può attribuirgli lo slancio straordinario che la scienza matematica prese in Olanda, poco dopo, per opera di Stevino, Snellio, Van Lansberge, A. Romano, van Ceulen, Mezio. Egli dunque meritava un' analisi coscienziosa della sua opera quale quella dataci dal P. Bosmans).

H. Bosmans, *L'algèbre de Pedro Nunez.* Annaes da Acad. polyt. do Perto. T. III, 1908. (Il dotto autore ritiene che il *Libro de Algebra* del celebre portoghese sia oggi meno apprezzato di quanto meriterebbe ed ascrive la causa di ciò all'estrema rarità dell'opera; per dimostrare quanto sia fondato il suo giudizio ed ottenere che venga generalmente diviso egli nel presente lavoro fa un'analisi particolareggiata di quel *Libro* e così si acquista agli occhi dello storico un nuovo titolo di benemerenza).

U. Ceretti, *Intorno allo zero.* Atti dell' Accademia di Udine, Ser. III, Vol. XIV, 1908. (Le tesi sostenute dall'autore con gran copia di erudizione sono: 1.° l'origine cinese del *segno* per lo zero; 2.° l' etimologia araba del *nome*).

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXII. Michele Coignet. Atti del R. Ist. Ven. Tomo LXVIII, 1909.

A. Favaro, *Galileo Galilei e la determinazione del peso dell'aria.* Riv. di Fis. Matem. e scienze naturali, Dicembre 1908.

A. Favaro, *Di una proposta per fondare in Pisa un Collegio di Lincei.* Arch. stor. italiano, Ser. V, T. XLII, 1908.

A. Favaro, *Serie decimonona di scampoli galileiani.* Atti e Mem. della R. Acc. di Padova. (Contiene i seguenti paragrafi: CXXVI. Intorno ad un cimelio galileiano. CXXVII. Componimenti poetici in onore di Galileo. CXXVIII. Di un privilegio chiesto per il dialogo dei Massimi Sistemi. CXXIV. Dove sia rimasta la salma di Galileo dal 9 Gennaio 1642 al 12 Marzo 1737. CXXX. Intorno ad un'opera postuma pel P. Cristoforo Scheiner contro Galileo).

Giovanni Schiaparelli, *I primordi dell' astronomia preeso i Babilonesi.* Rivista di scienza, Vol. III, 1908. *I progressi dell'astronomia presso i Babilonesi.* Id. Vol. IV, 1908.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

Bachmann, Niedere Zahlentheorie. I. Teil 402 pag. (1902) leg. lire 18.50. — II. Teil (Schluss): Additive Zahlentheorie, 480 pag. con fig. (1910) leg. L. 22.25.

Barnard a. Child, A new Algebra. Part. I-IV. L. 5.75.

Basset A Treatise on the Gèometry of Surfaces. Lire 14.

Bettazzi, Lezioni di calcolo integrale (1910) L. 5.

Bianchi, Vorlesungen über Differential-geometrie. II Ediz. 721 pag. (1910) L. 29.

Brioschi, Opere matematiche. Vol. V (ultimo) 1910, Lire 30. vol. I a IV cad. Lire 25.

Cristoffel, Gesammelte Mathem, Abhandl, Hrsg. von L. Maurer. Bd. I-II. L. 45.

Fano, Lezioni di Geometria descrittiva, date nel R, Politecnico (1910) L. 16.

Grassmann, Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. 2 Bde. I. Bd. Binäres. Lire 16.

Hadamard, Leçons sur le calçul des variations. Tome I (1910) L. 18.50.

Helm. Grundlehren der höheren Mathematik (1910) L. 17.25.

Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Sammlungen didakt Handbücher f. d. realist. Unterricht an höheren Schulen Bd I (1910) Lire 16.

Kelvin, Mathematical and Physical Papers Xol. IV: Hydrodinamics and general Dynamics. Lire 24.

Killing u. Hoverstadt, Handbueh d. mathemat. Unterrichts. I. Bd. Con 32 fig. nel testo; 456 pag. (1910). Lire 13.

Klein, Conferenze sopra alcune questioni di geometria elem., red. da F. Tägert e trad. dal Prof. F. Giudice, con pref. del Prof. G. Loria (1896) L. 3.

Klein, Elementarmathematik v. höheren Standpunkte aus.

1. Teil: Arithmetik, Algebra. Analysis. 590 pag. autog. con fig. L. 10.
2. Teil: Geometrie 615 pag. autografe con fig. (1909) L. 10.

Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 volumi (1909) L. 44.

Lilienthal, Vorlesungen üb. Differentialgeometrie I, Bd: Kurventeorie. Con 26 fig. nel testo di 370 pag. (1901) Lire 16.

Loria Gino, Le trasfigurazioni di una scienza. Donne matematiche (1902) 8° L. 2.

Loria Gino, Metodi di geometria descritriva. 16° (1909) L. 3.

Loria Gino, Il passato ed il presente nelle principali teorie geometriche. III ediz. (1907) L. 8.

Loria Gino, I poligoni di Poncelet. Discorso 8° pag. 50 (1889) L. 3.

Loria Gino, Spezielle algebrische u transzendente ebene Kurven. Theorie u. Geschichte. Deutsch v. Schütte. II Anflage. I Bd: Die algebraischen Kurven. Con 141 fig. su 14 tavole litografate. 490 pag. (1910) L. 21.50.

Digitized by Google

Loria Gino, Vorlesungen üb. darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte I: Die Darstellungsmethoden. Con 163 fig. nel testo di 220 pag. (1908) L. 9.

Mikami, Mathematical Papers from the Far East. Pag. 229 (1910) L. 13.

Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik 82 pag. (1910) L. 3.50.

Nettò, Die Determinanten. Pag. 128 (1910) L. 4.50.

Pascal, Repertorium der hôheren Mathematik. II: Geometrie. I. Hälfte Grundlagen und ebene Geometrie. 535 Pag. (1910) Leg. L. 13.

Perry, Höhere Analysis für Ingenieure. II. verbesserte und erweiterte Auflage. 464 pag. (1910) Leg. L. 17.

Poincarè, Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, 60 pag. (1910) teg. L. 3,50.

Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. 2. Verb. u. Verm. Auflage. 482 pag. L. 17.

Schröder, Abriss der Algebra der Logik, II. Teil: Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen. 159 pag. (1010) L. 5.50.

Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1909) L. 20.50.

Segre C., Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche: nota. (1880) L. 4.

Segre C,. Le coppie di elementi immaginarii nella geometria proiettiva sintetica (1886) L. 4.

Segre C., Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito (1895) L. 4.

Segre C., Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario, ecc. (1885) L. 4.

Simon, Geschichte d. Mathematik in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte (1908) L. 17.

Staude, Analytische Geometrie d. Punktepaares, des Kegelschnittes u. d. Fläche zweiter Ordnung. I. Teil, 528 pag. con 181 fig. (1910) leg. L. 28.50.

Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften. 4 Bände

I. Bd: Die Verwandschaften swischen Gebilden 1. Stufe. 415 pag. (1908) leg. L. 21.

II. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden 2 Stufe. 345 pag. (1908) leg. L. 21.

III. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden III. Stufe. 584 pag. (1909) leg. L. 26.

IV. Bd: Die nicht linearen u. d. mehrdeut. Verwandschaften II. u. III. Stufe. 486 pag. (1909) leg. L. 26.

Sylvester, The collected mathematical Papers. 3 vol.' L. 72.

Vol. I 1837-1853, Vol. II 1854-1763, Vol. III 1870-1883.

Thiele, Interpolationsrechnung (1910) L. 13.

Voigt, Lehrbuch d. Kristallphysik, L. 40.

Waals, Lehrbuch der Thermodynamik. I. Teil (1010) L. 16.

Widder, Untersuchungen über die Allgemeinste Lineare Substitution mit vorgegebener pter Potenz. 52 Pag. (1910) L. 4.25,

Genova — TIPOGRAFIA FRATELLI CARLINI FU G. B.

Digitized by Google

11. 394

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XII

1910

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18

1910

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XII — Ottobre, Novembre e Dicembre — 1910

Geometria differenziale.

LUIGI BIANCHI. — *Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales.* (T. 34 dei Mémoires des Savants étrangers; Paris 1909).

— — *Lezioni di geometria differenziale* (vol. III] *(Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche).* — (Pisa; Spoerri 1909).

(Continuazione v. Fasc. I pag. 16).

Il Cap. III studia infine le quadriche qualsiasi; e parte dall' osservazione che, se non si distingue reale da immaginario, i risultati analitici ottenuti per le quadriche rigate, devono anche valere per le quadriche a punti ellittici. Nel § 39 si pone un importante e generale problema analitico, la cui risoluzione (che invero presenta difficoltà gravissime) conterrebbe come caso particolare tutta la teoria fin qui svolta.

Nel § 40 si osserva che anche per le quadriche Q generali varrà lo stesso teorema che nel § 25 (cfr. più sopra) si è dato per le quadriche rigate, quando con π_1 si intenda un piano tangente a Q_k tirato da FF_1. Se però la quadrica Q è *reale,* si otterranno così trasformazioni B_k *reali,* soltanto se la quadrica confocale Q_k è *rigata.* La legge di applicabilità tra S e la trasformata S_1 è data dall' affinità di Ivory tra Q e Q_k. Ne segue che, *se* Q *è rigata, la corrispondenza di applicabilità tra* S *ed* S_1 *ha luogo tra le regioni reali, ossia è reale; se invece* Q *non è rigata, la applicabilità è soltanto ideale.* Nei §§ 41-43 si esamina particolarmente il caso del paraboloide ellittico; e si vede che le nostre trasformazioni B_k trasformano le superficie *reali* applicabili su di esso in modo *reale* o *ideale* rispettivamente in superficie *reali,* applicabili in modo *ideale* o *reale.*

I §§ 44-46 trattano il caso dell' elissoide e dell' iperboloide

Digitized by Google

a due falde, giungendo a risultati affatto analoghi; e si esamina infine il caso particolare delle quadriche rotonde.

Nei §§ 47-48 si esaminano le superficie S applicabili *idealmente* sulle quadriche *rigate* Q; e si vede che le superficie S_1, che si ottengono dalle S mediante una B_k, sono applicabili ancora *idealmente* sulla corrispondente quadrica, e applicabili in modo *reale* su S.

I §§ 49-53 studiano le superficie *reali* applicabili sulla sfera di raggio puramente immaginario (superficie pseudosferiche), sull' elissoide immaginario a equazione reale, sul paraboloide immaginario $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\,i\,z$: ed estendono a queste superficie le precedenti trasformazioni. Naturalmente si deducono come caso particolare tutte le proprietà più importanti delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.

Il Cap. IV è dedicato all' estensione alle trasformazioni attuali del teorema di permutabilità, già noto per le trasformazioni di Bäklund, e alla dimostrazione che anche nel caso attuale per mezzo di esso la successiva e illimitata applicazione delle nostre trasformazioni richiede, come per le trasformazioni di Bäcklund, la integrazione di una *sola* equazione di Riccati, e calcoli algebrici. La dimostrazione di questo teorema ha presentato difficoltà gravissime, superate nel modo più brillante; ma è impossibile riassumere tutti gli sviluppi geometrici e analitici, con cui l'A. dimostra questo teorema prima per le deformate rigate, e poi per le deformate qualsiasi; quì basterà ricordare che negli ultimi §§ del Capitolo si dà un breve cenno dell' esistenza di sistemi (cicli) di 2^n (n intero qualunque) superficie applicabili su una stessa quadrica, ciascuna delle quali è trasformata mediante n delle nostre trasformazioni B_k di altre n superficie del ciclo stesso. I sistemi di 2^n punti corrispondenti sulle nostre superficie e i loro piani tangenti formano una configurazione $(2^n, n+1)$ in quanto che ogni punto giace su $n+1$ dei piani, ogni piano passa per $n+1$ dei punti.

Il Cap. V studia una nuova trasformazione, che l'A. chiama H, e che nella presente teoria corrisponde alla trasformazione di Hazzidakis per le superficie a curvatura costante positiva.

Nei §§ 68-70 l' A. comincia a dimostrare che *affinché due superficie di due spazi a curvatura costante siano coniugate in deformazione* (*) *è che su di esse si corrispondano le assintotiche*

(*) Si dicono dall'A. assintotiche *virtuali* di una superficie S tutti i

Digitized by Google

(i sistemi coniugati) *e le geodetiche.* Si dimostra poi nel § 71 che le *quadriche* $\overline{Q}$ *coniugate in deformazione di una quadrica* Q, *sono le quadriche* $\overline{Q}$ *tali che si possa passare da* Q *a* $\overline{Q}$ *mediante una proiettività, che trasformi il sistema delle quadriche confocali a* Q *nel sistema delle quadriche confocali a* $\overline{Q}$; e nel § 72 se ne deduce (quando si prescinda dal caso banale di quadriche omotetiche) che un elissoide ha per quadrica coniugata un iperboloide a due falde, un iperboloide a una falda un altro iperboloide a una falda, in generale distinto. Se Q, $\overline{Q}$ sono due tali tali quadriche coniugate, ogni deformata S di Q determina *intrinsecamente* una deformata $\overline{S}$ di $\overline{Q}$. Il passaggio da S a $\overline{S}$ è la trasformazione H. Nel § 73 si dimostra: che H è involutoria; che H porta deformate rigate in deformate rigate; che H conserva i sistemi coniugati, e il sistema coniugato permanente; che se S si deforma attorno a una asintotica rigida, la $\overline{S}$ si deforma intorno alla corrispondente assintotica rigida; e infine che se per i punti di due asintotiche corrispondenti di S, $\overline{S}$ si trovano le tangenti alle geodetiche trasformate di rette corrispondenti delle Q, $\overline{Q}$, si ottengono rigate ancora applicabili su Q, $\overline{Q}$ e coniugate in deformazione.

La relazione tra la trasformazione H, e la trasformazione di Hazzidakis si ottiene dal teorema che falde omonime delle evolute di due superficie a curvatura costante trasformate di Hazzidakis l' una dall' altra sono coniugate in deformazione.

Nel § 74 si dimostra che se C è una congruenza di raggi tangenti a S, e se pei punti di $\overline{S}$ tiriamo i raggi tangenti nelle direzioni corrispondenti a quelle dei raggi di C, si ottiene una congruenza $\overline{C}$, la quale, se C è normale, è pure normale, e, se C è W, è ancora W.

Nei §§ 75-77 si stabilisce un importante teorema, da cui nel § 77 si deduce che, se S, S_1 sono trasformate B_k l'una dell' altra, la trasformazione H le porta in nuove superficie $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ ancora trasformate mediante una nuova trasformazione $B_{\overline{k}}$. In alre parola la H è *permutabile* con le trasformazioni B_k.

---

doppi sistemi di linee suscettibili. dopo una conveniente flessione di S, di diventare linee assintotiche *effettive;* due superficie S, $\overline{S}$ si dicono *coniugate in deformazione* se su di esse si corrispondono le assintotiche attuali, e le *assintotiche virtuali.* I problemi della deformazione delle due superficie sono *intrinsecamente* equivalenti. Corrispondenti deformazioni portano S, $\overline{S}$ in una nuova coppia di superficie coniugate in deformazione.

Digitized by Google

Per mezzo della trasformazione H, che continua a valere anche nella geometria non euclidea, si estende nel § 78 la teoria delle trasformazioni B_k agli spazii a curvatura costante.

Il Cap. VI si occupa dei sistemi coniugati permanenti delle quadriche Q e delle loro deformate S: cioè del sistema che rimane coniugato nella deformazione di Q in S. L'importanza di un tale studio sta in ciò che una deformata di Q è intrinsecamente determinata, quando su Q sia noto il corrispondente sistema coniugato permanente. Lo studio di questi sistemi coniugati equivale quindi a quello della deformazione delle quadriche.

Nei §§ 79-81 si studiano prima in generale, e poi specialmente nei casi particolari dell'elissoide e del paraboloide, i sistemi isotermi-coniugati, vale a dire quei sistemi di linee α, β, che alla seconda forma fondamentale della quadrica Q fanno assumere la forma $D(d\alpha^2 \pm d\beta^2)$. Si trova un caratteristico sistema di equazioni differenziali, a cui soddisfano le coordinate x, y, z di un punto mobile di Q, considerate come funzioni di α, β; si dimostra il teorema di Servant che ogni tal sistema α, β è un sistema permanente in una deformazione *infinitesima* di Q (*).

Nei §§ 82-84, indicati con u, v i parametri scelti in modo opportuno di un qualsiasi sistema coniugato permanente su Q, si trovano le equazioni differenziali, a cui devono soddisfare le α, β considerate come funzioni di u, v. Risolute queste equazioni è determinato il sistema delle u, v, ed è quindi anche determinata la corrispondente deformata di Q. Il problema della deformazione di Q è così ridotto alla risoluzione del sistema di queste equazioni differenziali. Dalle formole così ottenute si deducono nel § 85 il teorema di Darboux che *il sistema coniugato permanente su qualunque deformata S di Q é isotermo coniugato*, *e il teorema di* Servant *che, data S, il corrispondente sistema coniugato permanente si ottiene con sole quadrature.*

Nel § 86 si trasformano le equazioni differenziali ottenute nei §§ 82-84 in sistemi equivalenti di equazioni differenziali, questa trasformazione è specialmente utile nel caso dei paraboloidi. L'A. esamina successivamente nel § 87 le regioni reali e ideali dei paraboloidi ellittici e iperbolici. E trova in tutti i casi che il problema della loro deformazione si riduce all'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine in due va-

(*) Nel § 80 si esamina in qual caso un tal sistema è *permanente* anche in una deformazione finita.

Digitized by Google

riabili indipendenti u, v, e una funzione incognita (*) e quindi all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine in quattro funzioni incognite. I §§ 88-89 deducono dalle trasformazioni B_k per i paraboloidi le formole, che danno le corrispondenti trasformazioni per i precedenti sistemi di equazioni differenziali; e il § 90 si occupa brevemente della estensione di queste ricerche al caso non-euclideo.

Il Cap. VII si occupa delle relazioni che passano tra le trasformazioni delle superficie a curvatura costante, e le trasformazioni B_k per le superficie applicabili sulle quadriche rotonde o tangenti all'assoluto. I §§ 92-99 si occupano delle deformate delle quadriche rotonde: i teoremi di questi paragrafi hanno formato per l'A. uno dei punti di partenza per la costruzione dell'intera teoria.

Nel § 91 si studia più da vicino le relazioni che legano gli elementi lineari di due deformate complementari di una quadrica di rivoluzione. Nel § 92 si completa lo studio del Cap. XVII delle *Lezioni* sulla determinazione di quegli inviluppi di sfere pei quali, deformando comunque la superficie S_0 luogo dei centri, le due falde S, S_3 dell'inviluppo serbano sempre la stessa curvatura costante K. Non si impone più in questo studio la condizione che le sfere siano reali, e che le falde dell'inviluppo siano reali; si impone soltanto la realità di S_0. Nel § 93 si ricorda che in ogni caso le S, S_3 sono contigue per trasformazione di Bäcklund ad altre due superficie S_1, S_2 di curvatura K in guisa che (S, S_1, S_2, S_3) formano una quaderna del teorema di permutabilità. Le normali in due punti corrispondenti di S_3, S_2 si incontrano in un punto che genera appunto la superficie $\bar{S}_0$ complementare di S_0. Di più sulle superficie $\bar{S}_0$, S_0, S_1..., S_3 si corrispondono i sistemi coniugati.

I § 94-96 completano la discussione di tutti i casi possibili oltre a quelli già considerati nel Cap. XVII delle *Lezioni*.

Nel § 97, per mezzo delle formole del teorema di permutabilità relativo alle trasformazioni di Bäcklund, si calcolano le forme fondamentali della superficie S_0 relativa alla quaderna S, S_1, S_2, S_3. Nel § 97 si dimostra che una trasformazione di Bäcklund porta la quaderna delle S, S_1, S_2, S_3 in una quaderna

(*) Ecco queste equazioni:

$$\frac{d^2z}{du^2} \pm \frac{d^2z}{dv^2} = \text{sen } z \cos z; \quad \pm \frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = \text{senh } z \cosh z$$

Una di queste equazioni è la stessa, da cui dipende la determinazione intrinseca delle superficie pseudosferiche.

Digitized by Google

analoga S', ..., S'_3 (*). La superficie S_0' luogo dei punti d'intersezione di due normali corrispondenti a S', S'_3 è precisamente una trasformata B_k di S_0 (§ 99). Si giunge così per nuova via alle trasformazioni B_k per le quadriche rotonde.

Nei §§ 100-102 del Cap. VII si dimostra che la trasformazione di Bäcklund per una superficie pseudosferica S genera una trasformazione B_k per quella corrispondente superficie reale S_0 (applicabile su un paraboloide tangente all'assoluto) a cui conduce *(Lezioni* vol. II § 291) il metodo di Weingarten applicato alle superficie a curvatura costante. Si dimostra pure che su S, S_0 si corrispondono i sistemi coniugati e che alle linee di curvatura di S corrisponde il sistema coniugato permanente su S_0.

Nei §§ 103-104 si dimostra che una trasformazione di Bäcklund per una famiglia di Lamè di superficie S a curvatura costante (ma variabile dall' una all' altra superficie della famiglia) genera una trasformazione B_k per la superficie *reale* S_0 generata nel seguente modo. Si considerino i piani osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia nei punti di una delle superficie S, e se ne formi l' inviluppo S_0. Queste superficie S_0 sono com'è noto *(Lezioni,* vol. II, pag. 568) applicabili sulla quadrica osculante l' assoluto

$$y^2 + z^2 + (x - y + i z)^2 = \frac{1}{K},$$

dove K è la curvatura di S.

Se la famiglia di Lamé è un sistema di Weingarten, se cioè le sue superficie hanno *tutte* la stessa curvatura costante, la S_0 diventa complementare della superficie a curvatura costante, ed è applicabile su una quadrica che ha con l'assoluto un contatto quadripunto.

Si ottengono così trasformazione B_k reali di S_0, se S è pseudosferica. Un risultato affatto simile si ottiene al § 105 per le deformate delle quadriche a centro di Darboux semplicemente tangenti all' assoluto, le cui relazioni con le superficie pseudosferiche sono state esposte al Cap. XX delle *Lezioni.* Il § 105 e il Cap. VII si chiudono, accennando a tutto un campo di ricerche ancora inesplorato: lo studio delle congruenze W, le cui falde focali sono applicabili su quadriche *distinte.* L' A. si contenta di dare alcuni esempii di tali congruenze.

(*) Le S, S' formano un ciclo di Möbius di $2^3=8$ superficie (cfr. Cap. IV).

Digitized by Google

La Nota I, aggiunta al volume, paragona tra di loro, e porta a coincidere i sistemi di formole che definiscono le due classi di trasformazioni B_a per le deformate delle quadriche rigate (corrispondenti rispettivamente, come è detto nei primi due capitoli, ai due sistemi di generatrici di una quadrica reale).

La nota II osserva che, convenientemente interpretate, la teoria delle trasformazioni B_k per le deformate di una quadrica Q, la teoria della trasformazione H, il teorema di permutabilità continuano ancora a valere se la quadrica Q degenera in una delle sue coniche focali. Si ottiene così come caso limite della nostra teoria una teoria di trasformazione di certe linee, che l'A. chiama *coniche distorte,* in quanto che esse si ottengono dalle coniche ordinarie, riguardando queste come flessibili e inestendibili, e torcendo comunque la curva senza alterarne in alcun punto la flessione.

Queste ricerche sono riassuute nella II^a edizione tedesca, che il Lukat pubblicò coi tipi di Teubner delle lezioni del Prof. Bianchi e che ha per titolo: *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (1910).

GUIDO FUBINI.

Algebra.

H. WEBER. — *Lehrbuch der Algebra.* II Auflage. III. Band: *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen.* Mit zwei Abbildungen in Text. Braunschweig, Vieweg 1908, 8.° pag. XVI+733 (Prezzo Mk. 20).

Chi attentamente segue l'incessante evoluzione del pensiero matematico sarà stato indubbiamente colpito dal fatto che in quest'ultimo ventennio il significato ed il contenuto della parola Algebra subirono una radicale modificazione. Mentre tradizionalmente si considerava che questa scienza, presa nel suo più ampio significato, abbracciasse tutta e sola la teoria delle equazioni, con tutti i suoi annessi e connessi, ora, dopo che si riconobbe inevitabile l'intervento di funzioni trascendenti per risolvere le equazioni di un grado superiore al quarto, fu ravvisata la necessità di socchiudere una porta, dianzi sbarrata, e che è ormai spalancata. Coloro dei nostri lettori che conoscono le più recenti edizioni delle « Lezioni » del compianto Prof. Capelli ben conoscono l'entità e la portata della trasfigurazione alla

Digitized by Google

quale alludiamo. Nessuna meraviglia, pertanto, se il Prof. H. Weber, ristampando il suo prezioso volume sopra « le funzioni ellittiche ed i numeri algebrici », abbia reputato opportuno di farlo apparire come ultima sezione del suo grande trattato di algebra (cfr. *Bollettino*, I, 1898, p. 151).

I cinque libri di cui si compone il volume che oggi annunziamo sembrano a prima giunta fra loro slegati, ma uno studio approfondito ne rileva la stretta dipendenza che hanno fra loro, almeno i primi quattro. Di tutti accenneremo brevemente la materia.

Il I Libro *(Parte analitica)* si apre con una succosa esposizione delle proprietà degli integrali ellittici, delle loro forme normali secondo Legendre e Weierstrass, e del loro intervento nello studio di alcune curve. Ispirandosi all' esempio di Jacobi l'A. considera poi le funzioni Θ e ne studia le trasformazioni, e così è indotto ad introdurre e studiare le funzioni ellittiche di Jacobi e di Weierstrass, nonchè le note funzioni modulari: di siffatte funzioni la teoria viene svolta sino al punto da poterne stabilire le formole di moltiplicazione e divisione e di trasformazione. Il Libro si chiude con l' applicazione delle funzioni ellittiche alle equazioni di quinto grado.

Il Libro II *(Corpi quadratici)* è di stretta pertinenza della teoria dei numeri, come risulta dal seguente elenco dei temi in esso trattati: Discriminante. Numeri algebrici e forme elgebriche. Ideali nei corpi quadratici. Ordini nei corpi quadratici. Equivalenza secondo gruppi di numeri. Composizione delle forme ideali. Generi delle forme quadratiche. Numero delle classi in corpi quadratici.

Questo intermezzo aritmetico costituisce un indispensabile preludio al Libro III, dedicato alla Moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche, soggetto per svolgere il quale conviene notoriamente fare appello costante tanto alla teoria delle funzioni ellittiche quanto all' aritmetica superiore ed alla teoria dei gruppi di Galois,: più minuti particolari al riguardo ci farebbero uscire dai limiti imposti al presente resoconto.

Un naturale complemento al Libro III trovasi nel IV, ove, fra l' altro, è esposta la moltiplicazione complessa della funzione p (u) di Weierstrass.

In un campo prettamente algebrico riconduce l'ultimo Libro (*Funzioni algebriche*) ove l'A. espone, non senza varianti e notevoli aggiunte, la ben nota teoria aritmetica delle funzioni algebriche, concepita nel 1882 da lui e dal Dedekind.

Chiude l' importante volume una serie di tavole relative alle funzioni ellittiche ed alle forme quadratiche.

Digitized by Google

Data l'alta fama di scienziato e di maestro di cui gode l'A. è superfluo rilevare le eminenti qualità di chiarezza e precisione di cui è ricco il suo stile. Giova invece notare come, avendo egli modestamente indicato nella prefazione le questioni su cui non gli fu dato di dire l'ultima parola, ha condotto il lettore ai confini del nostro sapere, tacitamente invitandolo ad oltrepassarli: sicchè all'annunziato volume non fa difetto la suggestività, qualità d'importanza massima in un'opera didattica.

G. L.

Analisi infinitesimale.

R. D'ADHÉMAR. *Exercices et leçons d'analyse.* — Paris, Gauthier-Villars, 1908. VIII+208 p. 8.° (Prezzo 6 fr.).

Il titolo stesso di questo libro fa vedere come esso abbia un carattere misto e non facilmente definibile. Ciò che può dirsi senza tema di errare è, che lo studio attento di esso, accompagnato dallo svolgimento completo delle questioni che vi sono tratte o proposte, riuscirebbe di vantaggio incalcolabile a chiunque volesse rendersi padrone della teoria moderna delle equazioni differenziali.

Il libro comincia con un'introduzione, in cui si richiamano le definizioni e le formole più importanti attinenti al Calcolo infinitesimale ed alle sue applicazioni geometriche. Seguono tre capitoli di contenuto vario: il primo tratta delle formole di Wallis e di Stirling e delle somme di Gauss, con applicazioni al calcolo di molti integrali definiti; il secondo comprende problemi diversi relativi alle equazioni differenziali ed alla teoria delle curve e superficie; il terzo è dedicato alle funzioni sferiche, agli integrali euleriani ed alla funzione zeta di Riemann. Invece i capitoli 4 e 5 presentano in un quadro d'assieme i tratti principali della teoria delle equazioni a derivate parziali del tipo ellittico, e di quelle del tipo iperbolico o parabolico. Nel cap. 4 l'autore, dopo qualche nozione introduttoria sui determinanti e sul potenziale, tratta dell'equazione di Laplace, dell'equazione integrale di Fredholm e delle applicazioni di quest'ultima equazione alla Fisica matematica. Nel cap. 5, premessi alcuni cenni sui teoremi d'esistenza degli integrali, sull'ipergeometria, sulle caratteristiche, e su altri argomenti ausiliari, espone il metodo di Riemann e quello di Picard per la soluzione del problema di Cauchy, e passa poscia al problema d'inversione di Abel ed all'equazione integrale di Volterra. Un ultimo capitolo contiene una raccolta di enunciati di problemi ed una breve nota bibliografica.

G. VIVANTI.

Digitized by Google

Teoria dei numeri.

EDMUND LANDAU. — *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* I Bd., p. XVIII e 1-564; II Bd., p. IX, 565-961. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner 1909 (Prezzo Mk. 34, leg. Mk 36).

La teoria dei numeri primi ha in ogni tempo esercitato un fascino sui cultori dell' analisi matematica; ma specialmente nell' ultimo ventennio moltissime sono state le pubblicazioni ad essa riferentesi.

Parte di queste si mantengono in un campo del tutto elementare, anzi alcune trattano problemi che sono posti più da ingenua curiosità che da interesse scientifico, come quello di decomporre in fattori primi particolari numeri espressi da molte cifre, di trovar numeri primi più grandi di quelli prima conosciuti; e solo possono giovare indirettamente a uno scopo più elevato quando gli sforzi per risolvere tali problemi perfezionano metodi di calcolazione creando ripieghi che, da prima valevoli solo per casi particolari, sono capaci di essere generalizzati.

Altre pubblicazioni pure avendo di mira quistioni del tutto elementari, come quella di verificare se un numero sia o no primo, colgono la connessione fra questo campo e le regioni più elevate dell' analisi infinitesimale.

Altre ancora mettendo a profitto questa connessione si avvalgono dei potenti mezzi che fornisce la teoria delle funzioni di variabile complessa per esplorare quanto ancora c' è di riposto, se non di misterioso, nelle leggi che regolano la distribuzione dei numeri primi.

Altre infine si propongono di pervenire per una via più piana ai risultati ottenuti con mezzi forniti dalle più astruse dottrine.

In varie epoche le Accademie, subendo esse stesse il fascino summentovato, hanno in vario modo promosso gli studii sull' argomento, e in particolare hanno incoraggiato la pubblicazione di monografie da servir di guida per addentrarsi nelle indagini relative alla teoria dei numeri primi. Ma sia perchè queste monografie, obbligate a restar nello spazio concesso a lavori accademici, non esentavano il lettore dal riscontrare le memorie delle quali riassumevano i risultati, sia perchè dopo la pubblicazione dell' ultima si è accumulata una rilevante massa di nuove memorie, il Landau ha condotta a termine la pubblicazione di un trattato, il quale, liberando il lettore dalla neces-

Digitized by Google

sità di consultare i lavori originali, pone questo al corrente dei più importanti risultati delle antiche e recenti investigazioni in parola. E certo niuno meglio di lui potea eseguire tale poderosa impresa, giacchè egli è l'autore della maggior parte delle notevoli ricerche fatte nell'ultimo decennio sull'argomento; le quali lo hanno reso perfettamente padrone dei metodi più acconci sia elementari che di alta analisi.

L'intera opera si compone di una introduzione e di sei libri. La parte più sostanziale è contenuta nei primi due, che insieme alla introduzione costituiscono il I volume. Le ricerche accessorie e complementari, che pur tanta luce proiettano sull'argomento principale, e un particolareggiato indice della letteratura e delle fonti sono distribuire fra i quattro libri e le appendici del secondo volume.

Non di tutte le pubblicazioni mentovate nell'indice l'autore ha avuto l'intenzione di riferire i risultati, ma probabilmente solo di quelle le quali si trovano nell'indirizzo, che più promette di essere fertile di scoperte circa le leggi di distribuzione dei numeri primi.

La introduzione contiene la storia delle ricerche esposte nei primi due libri, dei quali il I ha per argomento la determinazione della totalità dei numeri primi non superiori a un numero assegnato e contenuti nella serie naturale; il II si occupa del medesimo problema in una progressione aritmetica, di cui il primo termine e la ragione sono primi tra loro.

Nella introduzione riportando le proposizioni dei più antichi antori se ne traducono gli enunciati nel linguaggio moderno molto più preciso; il che aiuta a distinguere facilmente ciò che dai detti autori era semplicemente asserito, oppure poggiato sopra euristiche considerazioni, da ciò che era dimostrato e rigorosamente stabilito.

Nella prima parte del I libro facendo uso di metodi elementari, di quelli cioè che operano con somme d'un numero finito di termini, e non s'avvalgono per la valutazione di queste del calcolo integrale, l'autore considera il valore limite massimo, e il valore limite minimo *(die obere und die untere Unbestimmtheits-grenzen)* del quoziente $\pi(x) : \frac{x}{\log x}$, in cui $\pi(x)$ indica la totalità dei numeri primi non superiori ad x, e log x il logaritmo naturale di x, e dopo una serie graduale di ricerche perviene a dimostrare che questi valori limiti includono il numero 1. Introduce poi le così dette *serie di Dirichlet* cioè quelle della forma

Digitized by Google

$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$; e considera da prima il caso in cui i coefficienti a_n e la variabile s siano reali, ed in particolare la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, e mediante poche preliminari proposizioni deduce, per ciascuna costante q, che i valori limiti minimo e massimo di

$$\log^q x \left(\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \right)$$

racchiudono fra loro il numero 0.

Passa poi al caso più generale delle a_n e della s complessi, ed estende a tutto il piano la funziona $\zeta(s)$, definita dalla $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ solo nel campo di convergenza di questa serie, ed esclusivamente coll'uso delle più ovvie proprietà di questa funzione, l'autore dimostra che i due valori limiti minimo e massimo del quoziente $\pi(x) : \frac{x}{\log x}$ coincidono, e cosi resta provata l'esistenza del limite unico, e l'eguaglianza

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1,$$

la quale s'enuncia dicendo che $\frac{x}{\log x}$ è un valore assintotico di $\pi(x)$, e conduce, in grazia degli sviluppi premessi, agli altri valori assintotici

$$\int_2^x \frac{du}{\log u}, \quad \mathrm{Li}(x) = \lim_{h=0} \left(\int_0^{1-h} \frac{du}{\log u} + \int_{1+h}^x \frac{du}{\log u} \right)$$

Ciò costituisce il teorema fondamentale della teoria dei numeri primi, e perciò l'autore l'invoca sempre colla semplice locuzione *Primzahlsatz*.

La dimostrazione di tale teorema riportata in quest'opera fu data dal Landau fin dal 1903, ed è preferibile a quelle che già ne avean dato De la Vallèe Poussin e Hadamard, giacchè essa non ha bisogno della parte più difficile della teoria della funzione $\zeta(s)$, che l'autore espone solo nell'ultima parte del I libro.

Digitized by Google

Alla classica valutazione assintotica $\int_2^x \frac{du}{\log u}$ intravvista da Gauss fin dal 1793, ma dimostrata solo nel 1896, l'autore fa seguire la formola da lui rinvenuta

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x\, e^{-\sqrt[14]{\log x}}\right),$$

la quale ha vantaggio su tutte le precedenti perchè offre una più precisa valutazione del resto, esprimento cioè che

$$\frac{\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}}{x\, e^{-\sqrt[14]{\log x}}},$$

al crescere indefinitamente di x, oscilla fra limiti finiti.

Nell'ultima parte del I libro si espongono i teoremi di Hadamard sulle funzioni trascendenti intere e la loro applicazione alla distribuzione degli zeri della funzione $\zeta(s)$.

Semplificando poi il metodo di Von Mangoldt si dimostra la formola data, ma incompletamente provata da Riemann per esprimere esattamente $\pi(x)$ per mezzo degli zeri della funzione $\zeta(s)$.

Si chiude il I libro col dedurre che, se fosse vera l'asserzione di Riemann (finora nè provata, nè confutata) che tutti gli zeri non reali di $\zeta(s)$ hanno eguale ad $^1/_2$ la parte reale, si avrebbe la più precisa valutazione assintotica di $\pi(x)$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\sqrt{x} \log x\right).$$

Sommamente commendevoli sono le semplificazioni introdotte dall'Autore ai procedimenti prima di lui seguiti, semplificazioni che conducono ad evitare, fin dove è possibile, le difficili quistioni circa la distribuzione degli zeri di $\zeta(s)$.

Questo perfezionamento agevola grandemente la estensione delle dottrine esposte nel I libro al caso che si consideri non più la serie naturale, ma una progressione aritmetica, di cui sia $ky + h$ il termine generale, e in cui il primo termine h e la ragione k siano primi tra loro. E così l'autore nel II libro, ampliando i medesimi procedimenti analitici mediante la teoria

Digitized by Google

dei caratteri di Dirichlet, in prima espone la celebre proposizione di questo matematico sull'esistenza di infiniti numeri primi nella progressione aritmetica; riporta poi la propria dimostrazione del teorema espresso dall'eguaglianza

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

dove $\Pi(x)$ indica la totalità dei numeri primi non superiori ad x compresi nella progressione aritmetica di termine generale $ky + h$, e $\varphi(k)$ indica la totalità dei numeri primi con k e inferiori k, ed infine riproduce la sua dimostrazione; la sola completa ed esatta, della estensione della formola di Riemann al caso della progressione aritmetica.

Per brevità taccio di varie interessanti digressioni ed applicazioni a quistioni diverse della teoria dei numeri, le quali si trovano intercalate in questi due libri che costituiscono il I volume. Sarò conciso nel dare idea del II volume anch'esso interessante e suggestivo di idee a chi voglia intraprendere ricerche sugli argomenti svolti.

La prima metà si occupa di alcune somme, cui dànno luogo le funzioni numeriche ordinariamente indicate coi simboli $\mu(n)$, $\lambda(n)$.

Come è noto $\mu(n)$, o funzione di Möbius, è eguale ad 1 se $n = 1$, è eguale a 0 se n decomposto in fattori primi ha almeno un fattore primo con esponente superiore ad uno, è infine eguale a $+1$ o -1 secondo che n, non avente fattori primi eguali, è composto di un numero pari o dispari di fattori primi.

Invece $\lambda(n)$, o funzione di Liouville. è eguale ad 1 se $n = 1$, ed è eguale a $+1$ o -1 secondo che è pari o dispari il numero dei suoi fattori primi contati ognuno tante volte quanto indica il suo esponente.

Ciò premesso hanno notevole importanza nella teoria dei numeri le valutazioni assintotiche delle somme

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \qquad L(x) = \sum_{n=1}^{x} \lambda(n)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n) \log n}{n};$$

Digitized by Google

e in particolare la dimostrazione della convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} \quad ,$$

le cui somme equivalgono rispettivamente a 0 e — 1.

Di tali quistioni si occupa il libro III, e delle somme $\Sigma\lambda(n)$ e $\Sigma\mu(n)$ estese ai termini della progressione aritmetica tratta il libro IV. Ognuno di questi due libri, come pure ciascuno degli ultimi due, è preceduto dalla storia delle ricerche rispettivamente contenutevi.

L' autore riunisce poi nel libro V:

I. lo studio di tante classiche serie connesse colla teoria dei numeri primi ed introdotte da Eulero, Möbius, Cesàro, Kluyvers;

II. la dimostrazione d' un teorema sulle serie di Dirichlet a coefficienti ≥ 0, e la sua applicazione a dimostrare il teorema di Tchebicheff sulla differenza fra la totalità dei numeri primi della forma $4y+3$ non superiori ad x, e quella dei numeri primi della forma $4y+1$ non superiori ad x;

III. infine le dimostrazioni di parecchi teoremi su $\mu(x)$ da Schmidt già provati, ma non così semplicemente.

Infine soggetto del VI libro è lo studio delle serie di Dirichlet del tipo più generale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, dove le λ_n costituiscono un' arbitraria successione di grandezze monotonamente crescenti all' infinito, serie che per $\lambda_n = \log n$ riduconsi a quelle già studiate.

Per quanto rapido e incompleto sia il cenno degli svariati argomenti svolti in quest' opera magistrale non sfuggirà al lettore quanta importanza abbiano le teorie che vi si trovano esposte, e quanto addentellato esse offrano a nuove ricerche.

Per maggiormente invogliare i giovani studiosi italiani a intraprenderne la lettura soggiungo che lo stile è piano e non offre difficoltà a chi per poco sia pratico del tedesco, il linguaggio è scrupolosamente preciso e non dà luogo ad ambagi, gli sviluppi di calcolo sono ampii, e non presentano lacune difficili a riempire. Il tempo che essi vi spenderanno sarà largamente compensato dalle molte cose che impareranno.

GABRIELE TORELLI

Digitized by Google

Geometria elementare.

F. Enriques e U. Amaldi. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* 4.ª edizione, Bologna, Zanichelli. 8.° p. 607. (Prezzo L. 4.50).

La rapidità con la quale la terza edizione di questo libro è stata seguita dalla quarta mostra che esso ha cominciato ad incontrare fra gli insegnanti le accoglienze che merita.

Chi scrive ha adottato per più anni nella scuola l'opera dei Proff. Enriques ed Amaldi, seguendola *ad litteram,* com'è suo costume per *ogni* libro di testo, e crede di poter assicurare che i suoi scolari non vi hanno trovato mai difficoltà, sebbene le teorie vi sieno presentate in modo strettamente rigoroso.

Gli è che gli egregi Autori hanno saputo trovare il giusto mezzo tra le esigenze didattiche e quelle scientifiche. L'abitudine alle ricerche di alta matematica ha reso loro facile il compito di tener conto delle ragioni della scienza, e d'altro canto, un certo innato senso d'arte, che si scorge chiaramente nelle loro memorie originali, li ha salvati dal rendere il loro libro un antiestetico manuale di sottigliezze aride.

Le novità introdotte in questa quarta edizione sono poche e di pura forma (come si può vedere dall'enunciato del n. 456, dal paragrafo relativo alla *superficie del cerchio*, dalla dimostrazione del n. 513, etc.); cosicchè non sarebbe opportuno diffondersi troppo sopra l'organatura del libro e il suo contenuto. Basti accennare alla teoria dell'equivalenza che ne costituisce il merito più insigne, a quella delle proporzioni che, partendo dalla celebre definizione di Euclide, tempera la difficoltà che potrebbe provenire da una trattazione sistematica in forma generalissima, intercalando l'esposizione dei teoremi astratti fondamentali con quella dai teoremi relativi a proporzioni fra segmenti ed altre grandezze geometriche; alla grande semplicità dei teoremi che conducono alla rettificazione della circonferenza e alla quadratura del cerchio; alla teoria della misura che contiene un rapido schizzo di una trattazione geometrica degli irrazionali (ritorno all'antico più che giustificato per chi non guardi da un punto di vista puramente formale); e infine al garbo col quale sono scelti i numerosi esercizi, ove si hanno gruppi di enunciati (pag. 78, 223, 296, 298 etc.) che permettono, a chi ne abbia il tempo e l'opportunità, di dare qualche cenno critico sulla teoria delle parallele e delle proporzioni o di trattare le attraenti questioni che si riferiscono alla possibilità o meno di risolvere con dati strumenti un determinato problema geometrico.

G. Scorza.

Digitized by Google

F. Enriques e U. Amaldi. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche* Bologna, Zanichelli, 8° p. VII+254 (Prezzo L. 2).

Con questo libro i Proff. Enriques e Amaldi forniscono all'insegnante, che voglia servirsene, un potente ausilio per svegliare e acuire nei ragazzi delle scuole tecniche l'intuizione spaziale e per eccitare in essi il desiderio di un coordinamento e di una sistemazione logica dei fatti geometrici, che trovi più tardi nei successivi corsi dell'Istituto il suo compiuto appagamento naturale.

In un primo capitolo, intitolato *Costruzioni e concetti fondamentali*, si parte dagli strumenti per definire le figure o introdurre i postulati « come semplici regole emergenti dalle relative costruzioni » e, mediante la riga graduata e il rapportatore, si stabilisce fin dalle prime pagine la nozione di misura per i segmenti, gli angoli e gli archi (i settori) di una stessa circonferenza (di uno stesso cerchio) o di circonferenze (cerchi) uguali; poi, passando all'esame delle posizioni notevoli di due rette di un piano, si svolgono le proprietà fondamentali delle perpendicolari e delle parallele; e infine si esaminano le posizioni relative di una retta e di una circonferenza o di due circonferenze situate in uno stesso piano.

Nel capitolo secondo, che tratta delle figure poligonali, i criteri di uguaglianza pei triangoli vengono strettamente collegati alle relative costruzioni fondamentali, traendo larghissimo partito dalle proprietà delle circonferenze che gli autori con raccomandabile novità hanno introdotto assai più presto di quel che ordinariamente non si usi; e dopo il breve capitolo terzo dedicato agli angoli nel cerchio e ai poligoni inscritti e circoscritti, si espone nel quarto la teoria dei poligoni equivalenti, ponendo a base i tre criteri fondamentali, che riguardano l'equivalenza dei poligoni equivalenti a un terzo, o dei poligoni che siano somme o differenze di poligoni equivalenti.

La teoria della misura e la nozione di rapporto introdotto nel capitolo quinto preparano la via all'esposizione, nei capitoli sesto e settimo, delle teorie della similitudine, della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio e con ciò si chiude la parte del libro dedicato alla planimetria.

Gli ultimi quattro capitoli si riferiscono alla geometria solida limitandosi, per necessità di programmi, « alle definizioni e alle nozioni strettamente necessarie per valutare superficie e volumi » e in essi « il criterio della misura . . . tenuto in vista in tutti gli Elementi, domina in modo assoluto ».

Digitized by Google

In tutto il volume (che è arricchito da un' ampia raccolta di esercizî graduati), delle proposizioni che si incontrano, alcune si giustificano sperimentalmente, altre si deducono per via discorsiva dalle precedenti; e con questa avveduta mescolanza di metodi, devuta a una sana valutazione dello sviluppo psichico dei discenti, da un lato non ci *mortificano* le loro tendenze intuitive, che giova anzi eccitare ed affinare, dall'altro si risponde in qualche modo alle loro incipienti esigenze logiche.

G. Scorza.

Fisica matematica.

Franz Richarz. — *Anfangsgründe der Maxwellschen Theorie verknüp/t mit der Elextronentheorie.* Mit 69 Figuren im Text. 8.° p. IX+246. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner, 1909. (Prezzo Mk. 7; leg. Mk. 8).

Nell' Ottobre del 1906 il Richarz tenne a Marburgo un corso di lezioni per i professori delle scuole secondarie su la teoria di Maxwell, e allora gli nacque l' idea del libro che venne testè alla luce.

L' origine stessa fa dunque subito pensare che non si tratti di un trattato completo e nemmeno di un lavoro dedicato a chi sia già profondo nella trattazione delle teorie della Fisica matematica.

Infatti per la facile lettura di questi « Anfangsgründe » si richiede soltanto la conoscenza dei fondamenti sperimentali della Elettrologia, e degli elementi della Meccanica e dell' Analisi e sopratutto della teoria del potenziale.

In un capitolo introduttorio, l' A. espone il metodo noto per dedurre la prima terna delle equazioni di Maxwell, considerando il lavoro che si esercita su l' unità di polo nel campo magnetico, utilizzando il concetto di corrente di spostamento e fondandosi sull' antica teoria dell' azione a distanza.

Ma in un capitolo successivo viene svolta la teoria da un altro punto di vista: la prima teoria e la forma dell' energia del campo vengono assunte come ipotesi, e si prescinde dalle azioni a distanza. Di quì, per mezzo del principio della conservazione, si deduce la seconda teoria delle equazioni di Maxwell. Intanto già a questo punto, l'A. ammette l' esistenza di quantità elementari di elettricità in parte libera e in parte legata agli atomi, e si prepara così il campo per edificare la teoria degli elettroni.

Digitized by Google

Nel capitolo seguente l'A. deduce dalle equazioni di Maxwell le leggi dei fenomeni statici per i *non* conduttori, seguendo il procedimento solito; però vengono poi generalizzate le equazioni fondamentali mediante l'introduzione del concetto di elettrone. Segue una discussione su le leggi fondamentali delle correnti stazionarie.

La teoria del potenziale è generalizzata per conduttori e non conduttori, e poi, nel sesto capitolo del libro, l'A. deduce le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo dalle equazioni di Maxwell. La legge di Biot e Savart è dodotta adoperando la nozione del potenzial-vettore, e infine, apportando poche variazioni ai metodi soliti, sono ricavate le leggi che determinano le forze fra correnti e magneti e le leggi dell'elettrodinamica.

Le leggi dell'induzione sono ricavate in un capitolo successivo dalla seconda terna delle equazioni di Maxwell, e vengono svolte con una trattazione esauriente.

Ma i fenomeni dell'autoinduzione sono pure considerati insistendo sulla influenza che questa esercita sul processo delle correnti variabili e sul movimento degli elettroni liberi; mentre che la teoria delle scariche oscillanti offre l'argomento all'ultimo capitolo, nel quale si considerano le onde elettromagnetiche. L'A. studia qui, dopo aver scritto le equazioni per la propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche, le onde di Hertz nei dielettrici e formula poi le relazioni fondamentali per le onde che si propagano nei conduttori.

Arriva infine alla teoria elettromagnetica della luce. E qui la discussione sulla relazione di Maxwell fra l'indice di rifrazione e la costante dielettrica, e su quella di Drude fra il potere riflettente e la conducibilità è molto estesa, profonda ed esauriente.

L'ultimo paragrafo è destinato a stabilire i confini della validità della teoria di Maxwell, e realmente a chi abbia letto il libro del Richarz, la portata di questa appare enorme.

Tutta l'esposizione è contenuta in 245 pagine, ma ciò non nuoce alla chiarezza, e fra gli studenti, ai quali questo libro è specialmente dedicato, esso merita una larga diffusione. Da esso la cultura dei giovani fisici potrà ritrarre un grande vantaggio.

LUIGI ROLLA.

Rassegna delle recenti dissertazioni.

H. EGERER, *Ueber die Kurve der Ecken der Vierseite die von den gemeinsamhn Tangenten eines festen Kegelschnitts und der Kegelschnitten eines Buschels gebildet werden.* Diss. Erlangen, 1906.

Digitized by Google

Il luogo dei vertici dei quadrilateri completi circoscritti ad ad una conica fissa ed alle singole coniche d'un fascio si può considerare come l'analoga nel campo non euclideo della curva luogo dei fuochi delle coniche di un fascio. La sua equazione fu indicata or fa un mezzo secolo da G. Darboux (cfr. G. Loria, *Spezielle alg. und transcendente ebene Kurven*, II, Aufl., Leipzig 1910, I Bd. p. 260). Il presente lavoro contiene uno studio approfondito di tale equazione, come applicazione della teoria delle forme algebriche, con un cenno intorno alle varie forme sotto cui può presentarsi la curva di 6.° ordine che essa rappresenta.

E. Geszner. — *Ueber die Asymptotenkurven einer Schar Konoidflächen in Allgemeinen und die des Cilindroids im Besondren.* Diss. Münster i W. 1906.

Le conoidi considerate dall'A. sono le superficie suscettibili della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = u.\ cos\ v,\ y = u.\ sen\ v,\ z = g.\ cos\ (nv),$$

ove g è una costante e n un numero intero: per n = 2 si ha in particolare il cilindroide. Nel presente scritto sono determinate le linee asintotiche di tutte queste superficie e le loro trajettorie ortogonali e viene indicata la rappresentazione sopra la sfera (di Gauss) delle une e delle altre.

Otto Langenkamp. — *Ueber Saccheris Untersuchungen des Parallelaxioms.* Diss. Münster i. W., 1907.

Svolgendo completamente un'idea adombrata da W. Killing suoi *Grundlagen der Geometrie* (I Bd. p. 79) l'A. dimostra che i concetti da cui muove il Saccheri nel suo celebre *Euclides ab omni naevo vindicatus* sono capaci di condurre alle tre geometrie iperbolica, ellittica e parabolica.

T. Ibel. — *Die Wage im Altertum und Mittelalter.* Diss. Erlangen, 1908.

Raccolta d'un immenso materiale fatta sotto la direzione dal Prof. E. Wiedemann e di grandissimo interesse per la storia della « fisica », preso questo vocabolo nella sua più ampia accettazione.

L. Berwald. — *Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen.* Diss. Univ. München 1909.

Questo lavoro, fatto sotto la direzione del Prof. Voss, ha per punto di partenza la celebre memoria di Kummer sui sistemi rettilinei di raggi. Fra i risultati stabiliti citiamo il seguente

Digitized by Google

teorema: « *Per qualunque rigata gobba contenuta in una congruenza rettilinea, il prodotto dei valori della « misura della curvatura » nei due corrispondenti fuochi di una generatrice è eguale all' inversa della quarta potenza della distanza fra i due punti limiti di quella generatrice.* L' ultima parte del presente scritto concerne il noto teorema di C. Sturm relativo all'ottica goometrica, di cui l'A. espone una nuova dimostrazione e sul quale porge ampie notizie storiche ed intesanti dati bibliografici.

H. Haussleiter — *Zur Theorie der Pfaffschen Systeme.* Diss. Greifswald 1909.

Lavoro fatto sotto la direzione dell' Engel e collegato a ricerche da questo pubblicate nei Leipziger Ber. 1898: è così difficile il compendiarlo in poche parole che lo stesso A. vi ha rinunciato.

F. Kliem — *Ueber Oerter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe.* Diss. Breslau 1909.

E' un lavoro di geometria numerativa « elementare », intendendo con questo epiteto di designare l' insieme di quelle questioni che si possono risolvere senza ricorrere al calcolo di Schubert; si basa sopra noto pubblicazioni del Prof.R. Sturm, sotto la cui direzione venne compiuto. Per porgere un' idea dei risultati stabiliti citiamo qualche esempio: « Date quattro schiere rigate projettive, quattro generatrici corrispondenti qualunque ammettono due quadrisecanti, il cui luogo geometrico è una rigata di 16.° grado. Date tre stelle di raggi projettive, tre raggi corrispondenti qualunque determinano una schiera rigata, il cui luogo geometrico è un complesso di 3.° grado. Date sei stelle projettive di raggi accade 30 volte che una sestupla di rette corrispondenti ammettano una comune secante. Ecc. ».

H. Oehler. — *Ueber die Gleichungessysteme, welche man aus einer Matrix variabeler Elemente durch Nullsetzen der Determinanten gegebener Ordnung erhalt.* Diss. Tübingen, 1909.

Questo lavoro può intendersi come un proseguimento delle ricerche sopra le matrici che vennero inaugurate da C. Segre e proseguite con ottimo successo da G. Z. Giambelli; quantunque l' indirizzo algebrico che in essa prevale ne manifesti il legame con le idee del Prof. Brill, sotto la cui direzione fu eseguito.

F. Noether — *Ueber rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* Diss. München, 1909.

Digitized by Google

Inspirandosi a ben note ricerche di E. J. Roth e P. Appell e avendo riguardo ad altre ricerche di O. Hölder, l'A. determina le equazioni differenziali del movimento di una sfera sopra di una superficie nell' ipotesi che questa sia di rotazione, riduce la questione all'integrazione di un'equazione differenziale di secondo ordine e dimostra che, se si tratta di una quadrica rotonda, tale equazione è integrabile per quadrature.

E. Roeser. — *Die Verfolgungskurve auf der Kugel.* Diss. Halle a. S. 1909.

E' noto che sotto il nome di curve di fuga, o curve del cane o curve di caccia s' intendono le curve piane descritte da un punto diretto costantemente verso un' altro, percorrente una linea assegnata. Tale definizione è evidentemente estendibile al caso in cui la superficie su cui avviene il moto non sia piana e nel lavoro che oggi annunziamo è trattato il caso in cui essa sia sferica, caso che può anche avere un' applicazione pratica quando s' immagini che i punti mobili stiano a rappresentare due navi una delle quali insegua l' altra. Ora se per risolvere la questione si usa un sistema di cordinate geodetiche si vede che essa dipende dall' integrazione d' un' equazione di Riccati di cui si conosce un' integrale particolare; l'integrazione si riduce, pertanto, ad una quadratura; benchè questa non si possa eseguire in generale, pure si può determinare la forma della curva domandata. L'A. si occupa da ultimo della questione analoga sopra la pseudo-sfera.

Ida Puccini — *Le configurasioni piane regolari d' indice 3.* Padova, Tip. Prosperini 1909.

L'A., scolara del Prof. Martinetti, riprende lo studio della questione trattata in una nota memoria di A. Schönflies *(Mathem. Annalen* T. XXXI) per completarne i risultati e giunge a determinare tutti possibili tipi di Cfz. piane regolari n_3.

Ettore Pianezza — *Generazione delle curve algebriche piane secondo H. Grassmann.* Atti della R. Università di Genova, 1909.

Indice: Introduzione. Cap. I: Prodotti planimetrici; sistemi di congruenze e di equazioni planimetriche; punti di annullamento d' un prodotto planimetrico non numerico; generazione lineare di luoghi e inviluppi algebrici; prodotti planimetrici di 2° grado rispetto ad una φ variabile. Cap. II: Generazione di cubiche mediante concatenamento di 3.° grado. Generazione di cubiche razionali mediante concatenamento di 3.° grado di minima ampiezza. Cap. III: Generazione mediante concatenamento di prima

Digitized by Google

specie in generale. Generazione mediante concatenamento (pppp). Generazione mediante fasci projettivi di curve rappresentati con prodotti planimetrici; applicazioni della teoria precedente.

FRIEDA GOLDMANN -- *Ponceletsche Polygone bei Kreisen.* Diss. Breslan 1909.

A. R. Sturm si deve la distinzione in due specie dei poligoni di Poncelet parilateri relativi al sistema di due cerchi; basandosi sopra tale osservazione l' autrice si è proposta di trovare le relazioni fra i raggi e la distanza dei centri di due cerchi che ammettono un poligono di Poncelet di data specie e con un dato numero di lati e così è giunta, non solo ai risultati ottenuti da Fuss, Steiner, Jacobi, Rosanes e Pasch, ma anche ad altri congeneri più complicati. L' importanza del lavoro è aumentata da alcuni contributi dativi dallo Sturm, sotto la cui direzione fu compiuto.

ALBERT GENS — *Die eindeutingen Transformationen der ebenen Kuven dritter Ordnung in sich, invarianten — und funktiotheoretisch behandelt.* Diss. Erlangeu 1909.

E' noto che le trasformazioni in sè stessa di una curva piana di 3.° ordine generale si dividono in due categorie e che ciascuna è contenuta in una trasformazione cremoniana: ora gli è appunto lo studio di tale corrispondenza fra punti di un piano che viene fatto nel presente scritto, sia coll' aiuto della teoria degli invarianti, che ricorrendo alla nota rappresentazione parametrica della curva.

EDWARD C. PHILIPS — *On the pentacardioid.* Diss. Baltimore 1909.

Applicando e svolgendo alcune idee originali esposte da F. Morley nei volumi I, IV e VII delle Trans. of the American math. Society, l'A. studia una notevole classe di inviluppi di classe n e ordine 2(n—1); per ciascuno i punti ciclici sono di tale singolarità da equivalere a n-2 cuspidi e (n-2) (n-3) punti doppi; ognuno di detti inviluppi ha poi ha distanza finita n-2 cuspidi e (n-2) (n-3) puntì doppi, inoltre (n-1) (n-2) bitangenti e nessun flesso. L'A. si arresta in particolare sul caso n=5, studiando qualche modo per generare la curva corrispondente (detta pentacardioide) ed i casi speciali che può presentare.

O. LÜDERS — *Ueber orthogonale Invarianten der bizirkularen kurven vierter Ordnung.* Diss. Halle a. S. 1910.

Come è noto, secondo il Thomae. si chiama « invariante

Digitized by Google

ortogonale » di una curva piana algebrica qualunque funzione dei coefficienti che non muta per una trasformazione ortogonale dei coefficienti. L' importanza di siffatte funzioni venne già dimostrata sopra l'esempio delle cubiche piane; essa viene confermata dal presente lavoro, ove sono stabiliti ed interpretati geometricamente molti invarianti ortogonali delle curve del quarto ordine bicircolari e in base ad essi viene proposta una nuova classificazione di tali curve.

R. Baldus — *Ueber Srahlensysteme, welche unendlich viele Regelfläche. 2 Grades enthalten.* Diss. Erlangen, 1910.

L'esistenza di congruenze di rette contenenti infinite schiere rigate condusse l'A. a proporsi di determinare tutte quelle che godono di tale proprietà. La soluzione di tale questione è contenuta nella memoria che oggi annunciamo. Anzitutto egli determinata (per poi non più occuparsene) le congruenze che contengono una serie molteplicemente infinita di schiere rigate, stabilendo che le uniche congruenze tali che per ogni raggio passi una serie di ∞^1 schiere rigate sono quelle costituite dalle corde di una cubica gobba e le correlative, mentre la congruenza lineare è l' unica tale che per ogni raggio della congruenza passino ∞^2 schiere rigate. Passando poi a considerare le congruenze tema principale del suo studio, l'A. dimostra il seguente teorema: « l'unica congruenza a curva focale che contenga ∞^1 schiere rigate è quella costituita dalle generatrici delle quadriche di un fascio o di una schiera »; sussiste naturalmente la proposizione correlativa. Da tutte queste congruenze l'A. prescinde nel resto della sua memoria e stabilisce le proprietà caratteristiche delle congruenze esenti da curve o sviluppabili singolari e contenenti infinite schiere rigate, occupandosi in particolare della determinazione delle caratteristiche di esse e della loro superficie focale, nonchè dei metodi di generazione. Per mancanza di spazio non riferiamo le proposizioni ottenute dall'A., e solo notiamo che il metodo da lui adoperato è quello sintetico costantemente usato da R. Sturm nella sua grande opera sopra la geometria della retta; varrebbe forse la pena di riprendere *ex-novo* la questione da lui lui trattata per applicarvi il metodo che ha per punto di partenza la considerazione della geometria di una quadrica a quattro dimensioni contenuta in uno spazio a cinque.

R. Dittrich — *Abstandsorter in Polarraume.* Diss. Breslau, 1910.

In una involuzione quadratica di punti sopra una retta esistono in generale le due coppie di punti aventi fra loro una

Digitized by Google

data distanza. Similmente: *a)* Data nel piano una polarità vi sono punti ciascuno dei quali si trova ad una data distanza dalla sua polare; il luogo di quei punti è una curva del IV ordine con due punti doppi a distanza infinita alla quale corrisponde per dualità l'inviluppo di quelle rette. *b)* Data una polarità nello spazio, il luogo dei punti che si trovano ad una distanza data dai loro piani polari è una superficie di IV ordine a conica doppia ed è di quarto grado il complesso costituto dalle rette che si trovano a data distanza delle loro polari. Tutte queste figure vengono dall'A. diligentemente studiate con i metodi geometrici costantemente usati nella scuola di cui è capo R. Stum. In un Appendice è brevemente investigato, con analoghi procedimenti, il complesso (pure di quarto grado) costituito dalle rette che stanno a data distanza dalle loro polari rispetto ad un complesso lineare.

H. Bohr — *Bidrag til de Dirichlet'ske Räkkers Theori. Afhandling for den filosofiske Doktorgrad.* Kóbenhavn, 1910.

Le serie di Dirichlet, soggetto della presente memoria, servono a definire delle funzioni che, in generale, non hanno confini naturali nei limiti dei campi di convergenza delle serie stesse. L'A. ha tentato di rimediarvi usando tali serie in modo differente del consueto e vi è riuscito appoggiandosi ad una memoria di E. Cesàro *(Bulletin des sciences math. et astr.* 1890).

G. L.

Attualità.

Compte-rendu du Congrès des Mathématiciens tenu à Stockholm 22-25 Septembre 1909, publiè par G. Mittag-Leffler et Ivar Fredholm. Leipzig et Berlin, 1910. 8.° pag, 136. (Prezzo Mk. 5, leg. Mk. 6).

I matematici che furono invitati e parteciparono a questa riunione appartengono ai quattro paesi (Svezia, Norvegia, Danimarca e Finlandia) che compongono il Comitato di patronato ideale degli *Acta mathematica;* tale riunione, destinata ad essere la prima di una serie di convegni congeneri, ottenne l'approvazione e l'appoggio del governo svedese. Come tutti i Congressi diede luogo a Conferenze d'ordine generale ed a comunicazioni sopra temi speciali: soltanto le prime vennero pubblicate (tutte

Digitized by Google

previamente tradotte in francese) nel volume che annunciamo; eccone i titoli e gli autori:

V. Bjerknes, *Dell' applicazione delle matematiche a questioni meteorologiche.*

I. Fredholm, *Le equazioni integrali lineari.*

J. Hjemslev, *Sopra i principi fondameatali della geometria.*

H. von Koch, *Sopra i sistemi di infinite equazioni lineari ad infinite incognite.*

E. Lindelöf, *Sopra il teorema di Picard nella teoria delle equazioni omogenee.*

G. Mittag-Leffler, *Sopra i fondamenti aritmetici della teoria delle funzioni secondo Weierstrass.*

K. F. Sundman, *Sopra le singolarità reali nel problema dei tre corpi.*

H. G. Zeuthen, *Introduzione ad un trattato didattico sui metodi numerativi della geometria.*

Nella bellissima conferenza del Mittag-Leffler molti noteranno con sorpresa la notizia che il Weierstrass ripudiava, come non conformi alle proprie idee, due esposizioni dei fondamenti dell' aritmetina intese a diffondere i concetti del grande analista di Berlino; sicchè ci sembra sia urgente che il pubblico matematico venga in possesso di una versione di autenticità indiscutibile ed indiscussa di tali concetti; a ciò non può servire la conferenza del Mittag-Leffler destinata ad esporre vedute personali dell'oratore. Interessantissima è pure la conferenza dello Zeuthen, che rappresenta una gustosa primizia del trattato di geometria numerativa che l' illustre geometra sta preparando per la raccolta dei manuali della Casa Teubner. Altri lettori s' interesseranno alle notizie fornite dal Bjerkness sopra gli studi che da tempo egli va facendo (in parte con l'aiuto pecuniario dell' istituzione Carnegie) sopra l' applicazione delle matematiche alla meterologia, sopra le gravissime difficoltà che egli ha incontrato e sui risultati sinora conseguiti. Lo spazio non ci consente di far menzione di tutte le altre conferenze, tutte piene di dottrina e ricche di vedute originali. Ma il fin quì detto ci pare sufficiente a mostrare come i « matematici del Nord » con la presente riunione siansi dimostrati degni continuatori di Abel; tale giudizio essi certo confermeranno nelle annuali adunanze venture, la prima delle quali verrà tenuta sotto il patronato della Danimarca.

G. L.

Digitized by Google

Annuaire pour l'an 1911, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris Gauthier-Villars. (Prezzo fr. 1.50).

Gli articoli originali che caratterizzano questo volume del celebre annuario sono i seguenti :

H. Poincarè, *Note sur la XVI Conférence de l'Association géodésique internationale.*

G. Bigourdan, *L'éclipse du soleil du 17 Avril 1912.*

H. Poincarè, *Notice nécrologique sur M. Bouquet de la Grye.*

Funérailles de M. Paul Gauthier; le 9 Décembre 1909. Discours de M. H. Poincarè. Discours de M. Baillaud.

G. L.

NOTIZIE.

QUALE ERA LA PROFESSIONE DI LEONARDO FIBONACCI? — Come uomo dedito alla mercanzia fu considerato dal Cossali, dal Bossut, dal Guglielmini, ecc. ecc. e noi stessi tale lo dicemmo *(Bollettino*, XI, p. 105); ma è importante avvertire che G. Enestrŏm ha notato *(Bibliotheca mathematica,* III Ser., T. VII, p. 255 e segg.) che manca una prova irrecusabile di tal fatto, onde si mostrò incline a negarlo; noi per decidere preferiamo attendere nuovi documenti che nuove ricerche da istituirsi a Pisa possono forse porre in luce.

***

UN NUOVO ORGANO DI BIBLIOGRAFIA MATEMATICA. — L'Italia non ha ancora potuto assicurarsi un mezzo di ricerca bibliografica e di consultazione paragonabile al *Jahrbuch* di Ohrtmann-Lampe, al *Bulletin des sciences mathématiques* del Darboux ed alla *Revue semestrielle des pubblications mathématiques.* Quando esisteva il *Bullettino* di B. Boncompagni, i numerosi e diligenti elenchi di pubblicazioni inseriti in ogni fascicolo, potevano in parte ajutare chi desiderava conoscere almeno la esistenza degli ultimi lavori intorno ad un dato argomento. A sopperire alla perdita proveniente dalla cessazione di tale importante mezzo di studio ha saggiamente provveduto da un triennio il Circolo matematico con la stampa del *Supplemento* ai suoi *Rendiconti*, ove si trovano accuratamente registrati i titoli dei lavori pubblicati in tutte le raccolte scientifiche che il Circolo riceve in cambio delle proprie pubblicazioni, raccolte che ammontano alla

Digitized by Google

rispettabile cifra di circa 200; tali *Supplementi* sono e saranno un prezioso ajuto a chi, nel licenziare i propri scritti, vuole attenersi all' onesto ed utile sistema delle citazioni esatte.

***

ERRATA-CORRIGE. — La ricerca delle forme tive dei complessi lineari dello spazio ordinario come si legge nella *Komplen-Symbolik* di R. Weitzenböck (p. 22 del presente vol.) contiene alcuni errori che furono segnalati dal Prof. E. Study e corretti dall' autore nella nota *Zum Formensystem von linearen Komplenen im* R_3 (Jahresber. der Deutschen Mathem. — Ver., T. XIX, 1910).

***

TEMI POSTI A CONCORSO DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO. — 1. *Premio dell'Accademia* per l' anno 1914: « Calcolare il numero delle classi del corpo ciclico generale e paragonarlo al numero delle classi dei suoi divisori ». Premio 5000 Marchi; scadenza 31 Dicembre 1913. 2. *Premio Steiner*: Determinare la superficie di quinto ordine non degeneri contenenti una o più serie di coniche proprie e stabilirne le principali proprietà. Si richiede che, a conferma dell'esattezza e compiutezza de' risultati ottenuti, vengano fornite sufficienti illustrazioni analitiche delle considerazioni geometriche ». Premio 7000 Marchi; scadenza 31 Dicembre 1913. I lavori dei concorrenti possono essere scritti in tedesco, latino, francese, inglese od *italiano* e debbono essere presentati entro il termine prescritto alla Segreteria dell'Accademia (Berlin W. 35, Postdamerstr 120).

***

TEMA POSTO A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DI MADRID, PER L'ANNO 1911. — « Problemi geometri celebri la cui soluzione è impossibile col solo uso della riga e del compasso. L'indicazione di essi dovrà essere presentata in forma precisa e chiara, ma con la massima concisione possibile; essa comprenderà la storia di detti problemi, dei cenni sopra la loro importanza e sui tentativi di soluzione per parte di matematici di tutti i tempi, nonchè sopra i mezzi proposti per ottenerne una soluzione approssimativa. I concorrenti dovranno sforzarsi di presentare una dimostrazione elementare od un ragionamento abbastanza probatorio per togliere ogni dubbio riguardo all'anzidetta impossibilità, anche nella mente dei meno famigliarizzati con teorie moderne. Aggiungere la bibliografia ed uno sguardo alle principali dimostrazioni relativamente moderne ».

Digitized by Google

Premio 1500 Pesetas. I manoscritti in castigliano o latino devono pervenire alla Segreteria dell'Accademia prima del 31 Dicembre 1911.

***

TEMA POSTO A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DI DANIMARCA. — Seguendo Poincaré si comprende generalmente sotto il nome di « serie asintotiche » delle serie, ordinate secondo le potenze intere discendenti di un variabile, che divergono per tutti i valori finiti di questa. Siffatte serie hanno rappresentata una parte importante nelle matematiche pure, ma specialmente nelle matematiche applicate, giacchè sono capaci di fornire spesso con grande approssimazione il valore numerico della funzione che si suppongono rappresentare; e siccome in questi ultimi tempi si è appreso a fare dei calcoli esatti con certe classi di serie divergenti, così l'importanza di tali serie si è trovata piuttosto aumentata.

Esaminando la teoria delle serie divergenti, quale si suole presentarla oggi, si vede che in generale essa può ricondursi — benchè occorra per ciò fare appello a lunghi artifici — alla teoria delle serie convergenti. Ora una osservazione dell' Hadamard (*Transactions of the American mathematical Society*, T. III, 1902, p. 421-422) mostra la possibilità teorica di trasformare in convergenza assoluta la divergenza delle serie asintotiche, con la semplice aggiunta ad ogni termine della serie un nuovo termine opportunamente scelto, d' ordine infinitesimo rispetto alla variabile. Così non si muta il grado d' approssimazione a cui si giunge arrestando la serie asintotica ad un numero di termini scelto ad arbitrio; ma si ottiene il vantaggio di render suscettibile la serie d' una trattazione esatta in un modo più semplice che per mezzo delle serie divergenti. Hadamard ha di recente dimostrato (*Bulletin de la Société mathématique de France*, T. XXXVI, 1908, p. 77-85) in qual modo un procedimento di tal fatta possa venire effettivamente realizzato per le note serie asintotiche delle funzioni di Bessel $J_0(x)$ e $J_0(ix)$, ove x è reale. Ma non si vede se sia possibile generalizzare questo metodo ad altre serie asintotiche di un carattere più generale.

Siccome sarebbe della massima importanza il possedere un metodo generale dell' anzidetta specie, applicabile effettivamente aalla maggior parte delle serie asistotiche note ed utilizzate in pratica, l'Accademia Danese pone a concorso per la sua Medaglia d'Oro la questione seguente:

Esporre un metodo per trasformare una serie asintotica in

Digitized by Google

una serie convergente avente lo stesso grado d'approsimazione: tale metodo si dovrà applicare alla maggior parte delle serie asintotiche conosciute. Si discuterà in particolare la questione di sapere qual senso debbasi attribuire agli sviluppi trovati quando la variabile si suppone complessa in un campo conveniente.

Il concorso si chiude col 31 Ottobre 1911.

***

TEMA PROPOSTO DELLA FACOLTÀ FILOSOFICA DI BERLINO. — « Esposizione comparata delle varie dimostrazioni che vennero date per il Teorema di Picard, generale e speciale ». Le risposte devono esser date entro il corrente anno accademico.

***

TEMA PROPOSTO DA UN ANONIMO DILETTANTE. — « In quanti modi si può scambiare un Tallero mediante le monete che hanno attualmente corso in Germania? » A chi invierà entro il 31 Dicembre 1910 la risposta esatta a P. v. Schaewen (Naumburg a S.) verrà corrisposta la somma di 100 marchi; fra vari risolutori deciderà la sorte.

***

DUE PREMI LOBATCHEWSKI ciascuno di cinquecento rubli verranno conferiti nell'anno 1912 dalla Società fisico-matematica di Kasan.

Il primo verrà assegnato al miglior lavoro sopra la geometria non-euclidea pubblicato nel sessennio 1906-1912 in Russo, Francese, Tedesco, Inglese, Italiano o Latino; in nessun caso il premio può essere diviso; fra lavori di egual valore deciderà la sorte.

Per il secondo la Società propone il seguente problema: « Studio degli integrali generali delle equazioni di Painlevé (equazioni differenziali di second'ordine e secondo grado aventi punti critici fissi); si richiede lo studio particolareggiato di uno dei tipi di dette equazioni » (cfr. Painlevé, C. R. T. CXXVI, e Bulletin de la Soc. math. de France 1909; Gambier, Acta mathematica 1909). Le memorie (manoscritte o stampate) dei concorrenti devono pervenire alla Società giudicatrice prima del 4 Novembre 1911. Il giudizio sopra entrambi i concorsi verrà pronunciato il 4 Novembre 1912.

***

TEMA DI CONCORSO PROPOSTO DALLA SOCIETÀ SCIENTIFICA DI BRUXELLES. — « Riassumere e valutare l'opera scientifica di Gregorio di S. Vincenzo ».

Digitized by Google

PER LA BIOGRAFIA DI GUGLIELMO LIBRI. — Nel Bullettino ufficiale che la Società Bibliografica Italiana pubblica sotto il titolo *Il libro e la stampa* Iro da Venegone (nome o pseudomino?) pubblica (T. III, 1909, p. 131-140) tre lettere di Guglielmo Libri al Gussalli, scritte da Londra negli anni 1851-54, ed i cui autografi sono conservati nella Biblioteca di Brera (Milano). Tali lettere sono precedute da alcune interessanti notizie intorno al padre del famigerato erudito ed intorno a lui stesso ed accompagnate dalla riproduzione in zincotipia di una caricatura, tratta da un album di macchiette fiorentine posseduto da Giuseppe Cavalieri, che però si riferisce ad un altro Guglielmo Libri (ivi T. IV, 1910, p. 45). Ci sia lecito notare come ben pochi di coloro che studiarono l'*opus magnus* del Libri e gli importanti documenti di cui esso diede notizia accetterà il seguente giudizio che ivi si legge: « Anche la troppo celebrata *Histoire des sciences mathématiques* deve dirsi libro pieno di leggerezza e di errori, che se oggi resta ancora in possesso d'un certo nome, reliqua della fama trascorsa, è destinato a morire interamente »; ben è vero che non tutto quanto è ivi esposto corrisponde a ciò che oggi si ritiene per vero; ma ciò proviene, non da colpa dell'autore, ma da nuovi fatti venuti in luce in questi ultimi settant'anni. D'altronde l'invecchiamento precoce non è la sorte di tutte le opere storiche in un'epoca in cui la critica e la ricerca di nuovi fonti precedono con inaudito fervore? Si badi, dunque, di non coinvolgere l'opera nel severo giudizio pronunziato sopra l'autore,

In un senso consimile è redatta la nota di A. Favaro, *A proposito di Guglielmo Libri e della sua « Histoire des sciences mathématiques en Italie »*, inserita nel T. IV (1910, p. 18) dello stesso periodico. Nel quale finalmente fu anche pubblicata la seguente lettera (T. IV, p. 66):

Genova, 28 Aprile 1910.

Illustre Presidente e caro amico,

Due interessanti articoli, di recente pubblicati in *Il Libro e la Stampa*, hanno fatto risorgere una questione di storia letteraria, e forse politica, a cui da molti e da gran tempo s'invoca vivamente una soluzione, in cui il desiderio si acqueti. La questione consiste nel determinare l'entità delle colpe commesse da Guglielmo Libri. Lo spettacolo accorante offerto da un uomo che, dopo di aver conseguita una posizione scientifica eccelsa, quale si sarebbe detto follia sperare, si lascia traviare dal malsano desiderio di appropriarsi cose non sue e precipita al fondo della scala sociale, è un fatto così impressionante per la sua stranezza, che dovrebbe dirsi impossibile, ove non offrisse una

Digitized by Google

non meno impressionante analogia con avvenimenti di cui ai dì nostri fu teatro l' Italia, i quali mantennero il nostro paese per lungo tempo in stato di profonda agitazione, per far cessare la quale fu necessario l' intervento dell'Alta Corte di Giustizia. Ma per Guglielmo Libri la questione si presenta ancor più complessa e spinosa: chè si tratta di un profugo che mai dimenticò la madre-patria, tanto che, neppur quando era rivestito della veste di storico della scienza, seppe far tacere l' ardente amore per la sua terra lontana, che divampavagli nel seno. Si tratta di persona che, rifugiatasi in Inghilterra per sottrarsi al carcere che lo minacciava, non venne colà posto in bando quale un volgare malfattore, cosa tanto più notevole in un paese, in cui non soltanto vengono rigorosamente rispettati i precetti della morale più rigida, ma si suole fare sfoggio di sentimenti siffatti. Tutto ciò fa acquistare alla questione Libri il fascino d' un enigma. A risolverla possono servire gli atti dei vari processi a cui diedero origine le pretese malversazioni del Libri, le molte pubblicazioni sull' argomento, i carteggi del tempo e meglio ancora i ricordi delle persone che (al pari di Alessandro d'Ancona) assistettero al prodigioso volo d'Icaro ed alla precipitosa caduta dell' illustre storico della matematica in Italia. Queste persone raggiunsero ormai un' età rispettabile; quindi urge vengano interrogate per ottenerne argomenti positivi, onde decidere se la sentenza pronunciata contro di lui debba passare in giudicato, oppure se il processo meriti di subire una totale revisione. E' questo un lavoro che assai meglio si addice ad uno storico di professione che ad uno scienziato; ed io chiedo che il « Bullettino » della nostra Società esprima il voto formulato da me (e non da me soltanto!) che tale processo venga ripreso ex-novo, ora che è fugato ogni dubbio di legittima suspicione, per assodare se il Libri sia stato un uomo di alto intelletto, ma di un livello morale non superiore a quello di Bacone, oppure se egli sia stato vittima di basse passioni, quali l' invidia dei contemporanei o la gelosa antipatia verso gli stranieri; dubbio che sorge spontaneamente in chi seguì la polemica originata dalla calda difesa che fece del nostro conterraneo un uomo del valore di P. Mérimée.

Mi è grata l' occasione per confermarmi una nuova volta

aff.mo e dev.mo

GINO LORIA

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 61, 62, 122.
d'Adhémar 105.
Adler 54,56.
Agostino (Sant') 46.
Ahrens 83: 81.
d'Alembert 61.
Almansi 62.
Amaldi 112, 113.
Amodeo 64, 74.
Ancona (d') 198.
Andrè 78, 81.
Antonio Tommaso (Padre) 89.
Apollonio 15.
Appell 118.
Archimede 36, 37, 38, 43, 61, 89.
Armin 48.

Bacone 87, 128.
Bäcklund 17, 98, 101. 102.
Baillaud 28, 123.
Baker 73.
Baldus 120.
Ball 70.
Baltzer 81.
Battelli 68.
Beghagel 48.
Beltrami 29, 32, 62.
Bernoulli D. 89.
Bernoulli J. 33.
Bertrand 21, 79.
Berwald 116.
Bessarione 87.
Bessel 125.
Betti 30, 31, 62.
Bianchi 16, 22, 97, 103.
Bigourdan 123.
Biot 115.
Bjerkness 122.
Bjornbö 89.
Boggio 62.
Bohr 121.
Bolyai G. 6, 82.
Bolyai W. 10, 82.
Boncompagni 35, 139.
Bopp 89.
Borel 52.
Bortolotti 2.
Borrelli 95.
Bosmans 89, 04, 95, 96.
Bossut 123.
Bouquet de la Grye 123.
Boutroux 95.
Brill 117.
Bricard 48.
Bruns 26.
Bubendey 48.
Burali-Forti 71, 73.
Burckhardt 90, 93.
Burgatti 32.
Bruns 26.

Cajori 63, 64, 88, 89.
Campbell 78.
Cantor G. 13.
Cantor M. 88.
Capelli 46.
Cardano 4. 5, 95.
Carnegie 122.
Carrati 2.
Caramuel 95.
Cartesio vedi Descartes.
Cauchy 29, 105.
Cavalieri B. 94.
Cavalieri G. 127.
Cayley 39.
Ceretti 96.
Cerruti 28, 32, 64.
Cervantes 49.
Cesàro 22, 47, 111, 121.
Ceulen 96.
Chasles 48, 94.
Chieffi 18, 22.
Cicerone 84.
Cisotti 73.
Clairaut 46.
Clapeyron 70.
Coignet 95. 96.
Comandino 95.
Corbino 62.
Cossali 123.
Cremona 29, 31, 37.
Cullis 63.
Czuber 25, 26.

Daniele 83.
Darboux 17, 81, 82, 100, 102, 116, 123.
Dedekind 13, 33, 37, 39, 43, 60, 104
Dehn 43.
Desargues 12, 37, 38, 39.
Descartes 50.
Dette 15, 16.
Deventer 95.
Dintzel 60.
Dirichlet 56, 107, 110, 121.
Dittrich 120.
Dreyfus 82, 84.
Drude 115.

Digitized by Google

Duhem 89.

Egerer 115.
Eneström 95.
Engel 54, 117.
Enriques 112, 114.
Erone 89.
Euclide 7, 10, 12, 33, 84, 35, 12, 43, 53, 112.
Eulero 29, 30, 64, 83, 89, 91, 111.

Fagnano 94.
Favaro 89, 95, 96, 127.
Fechner 26.
Ferrari Lodovico 1, 4, 5.
dal Ferro Filippa 2, 3.
» Florimo 1, 2.
» Gabriele 3.
» Gerio 2.
» Lodovica 3.
» Scipione 1, 2, 3, 4, 5.
Fibonacci (Leonardo) 35, 123.
Fitch 63.
dal Fiore 1.
Frati Carlo 3.
Frati Ludovico 1.
Fredholm 102, 105, 121, 122.
Fubini 22, 103.
Fuss 118.

del Gaizo 99.
Galdeano 19.
Galileo 32, 89, 95, 96.
Gambier 126.
Gambioli 85, 89.
Gauss 80, 95, 105, 109, 116.
Gens 119.
Gerdil 48.
Gerland 89.
Gessi 3.
Geszner 116.
Gherardi 1, 4, 5.
Giambelli 117.
Giudicini 2.
G. L. vedi Loria.
Goldmann Frieda 119.
Grassmann 64, 70, 71, 118.
Green 30, 62.
Guareschi 71.
Guccia 84.
Gudermann 25.
Guglielmini 123.
Guichard 16, 17.
Gühnter 89.
Günter 68.
Gutzmer 48.

Haas 87.
Hadamard 62, 108, 125.
Hahn 48.
Hamilton 40, 71.
Hankel 18.
Harzer 35.
Hauck 25.
Haussleiter 117.
Hazzidakis 98, 99.
Heiberg 64, 89.
Heine 25, 95.
Hering 64.
Hertwig 69.
Hertz 115.
Hesse 80.
Hilbert 6, 13, 36, 39, 62.
Hjemslev 37, 29, 122.
Hölder 118.
de l'Hôpital 98.
Holzmüller 95.
Hooke 62.
Huntigton 78.
Huygens 30, 62, 95.

Ibel 116.
Ivory 20, 97.

Jacobi 83, 84, 94, 104, 119.

Kant 95.
Karnasch 39, 60.
Keogl 68.
Klling 116.
Kirchhoff 30, 62.
Klaesse 52.
Klein 36. 39, 42, 43, 16, 52.
Kliem 117.
Kluyvers 111.
von Koch 122.
Königsberger 86.
Kommerell 25.
Krazer 94.
Kummer 116.

Lagrange 29, 83.
Laisant 84.
Lallemand 28.
Lamè 29, 72, 102.
Lampe 123.
Landau 106, 111.

Digitized by Google

Langekamp 116.
van Langesberge 96.
Laplace 62, 105.
Lattès 71.
Lauricella 52.
Lebon 81, 83.
Legendre 43, 104.
Lejeune-Dirichlet vedi Dirichlet
Leibniz 6, 7.
Lemoine 47, 55, 84.
Lesser 50.
Levi B. 43.
Levi-Civita 30-62.
Libri 4, 6, 127, 128.
Lindelöf 122.
Lindemann 48.
dal Lino 4.
Liouville 110.
Lipps 26.
Lissajous 51.
Lobatschewsky 33, 126.
Loewy A. 27.
Lorentz 62, 73.
Loria 16, 27. 28. 49, 50, 51, 54, 56, 81, 83, 84, 85, 88, 89, 105, 116, 122, 123, 128.
Love 62.
Lücke 25.
Lüders 119.
Lüroth 65.
Lukat 103.

Macchiavelli 32.
Mach 85, 87.
Maclaurin 92.
Magrunder 74.
Malagola 2, 3.
Manes 27.
Mangoldt 109.
Mansion 89, 95.
Marcolongo 31, 71, 73.
Marletta 13.
Martinetti 118.
Mascheroni 55.
Masson 82.
Maurolico 33.
Maxwell 61, 62, 73, 114, 115.
Mazzoni 2.
Merimée 128.
Mezio 98.
Minding 70.
Minkowski 56, 59, 61.
Mittag-Leffler 121, 122.
Möbius 71, 110, 111.
Monge 80.
del Monte 95.
Montucla 1.
Mordente 95.
Morley 119.
Mukhopadhyay 63.
Müller F. 64, 89.
» G. 52, 54.
» S. 74.
Murillo 49.
Muslime 89.

della Nave 3, 6.
Nemorario 89.
Newton 85.
Nicomaco 89.
Noether 117.
Nunez 96.

Oehler 117.
Orthmann 123.
Olivier 89.
Osborne 76.
Oughtred 63.

Paciuolo 95.
Painlevè 126.
Papin 67.
Pappo 36, 37, 38, 39, 40.
Pardies 89.
Pascal B. 33, 36, 37, 95.
Pasch 36, 37, 39, 119.
Peano 33, 86.
Pennacchi Cornelia 3.
Philipps 119.
Petrarca 32.
Pianezza 118.
Picard 81, 82, 105, 122, 126.
Pieri 6, 13, 40, 41, 47.
Planck 6.
Plücker 71.
Poincaré 50, 79, 80, 81, 82, 123.
Poinsot 30, 71.
Poisson 62.
Prasad 63.
de' Preti 3.
Puccini Ida 118.

Rados 72.
Reyez y Prosper 37.
Reynolds 66.
Richarz 114-115.
Riccardi 5.
Riccati 21, 118.
Richter 23, 24.
Riemann 105, 107, 110.
Roeser 118.

Digitized by Google

Rolla 115.
Rolle 91.
Romano 96.
Rosanes 119.
Roth 118.
da Rubiera 4.
Runge 14, 15.

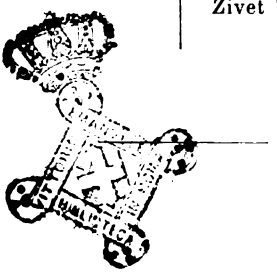
Saccheri 116.
Savart 115.
Scaramaini 3.
Scheiner 96.
Schaeven 126.
Schiaparelli 96.
Schmidt 111.
Schönfliess 118.
Schubert 117.
Schur 36, 13.
Scorza 112, 114.
Scott 77, 78.
Servant 100.
Segre 117.
Servita 3.
Silla 30.
Simon 44, 48, 87.
Sisam 23.
Smith 86.
Snellio 96.
Soliano 3.
Somigliana 62.
Sommer 57.
Stäckel 51, 78, 89.
Sterne 15.
Staudt 37.
Steiner 24, 83, 119, 124.
Steinmetz 76.
Stirling 165.
Stevino 96.
Stodola 76.
Study 124,
Sturm C. 117.
» R. 23, 117, 119, 120.
Südhoff 89.
Sundmann 122.

Talete 13.
Tannery G. 52.
Tennery P. 52.
Tartaglia 4, 31, 95.
Tchebyceff 111.
Thomae 37, 119.
Tiraboschi 1.
Timerding 70, 71.
Torelli G. 111.
» M. 4.
Torricelli 74.
Townsend 75, 76.
Tiraboschi 62.

Vacca 33.
Vaillati 45, 85, 87.
Vaillant 62.
delaVallèe-Poussin 108.
Varignon 71.
Vassura 94.
Veblen 38.
da Venegone 127.
Vernocchi 3.
Veronese 13, 53.
di S. Vincenzo 126.
Virgilio 85.
Vivanti 61, 62, 93, 94, 105.
Vogt 89.
Volterra 61, 105.
Voss 116.

Wade 63.
Wallis 105.
Weber H. 13, 103, 105.
Wendelin 94.
Weierstrass 104, 122.
Weingarten 65, 70, 102.
Weisbach 23.
Weitzenbock 22, 124.
Wiedemann 87, 116.
Wieleitner 89.
Wohlwill 89.
Woodward 76.

Zani 4.
Zeuthen 64. 89, 94, 122.
Zivet 74.



Digitized by Google

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

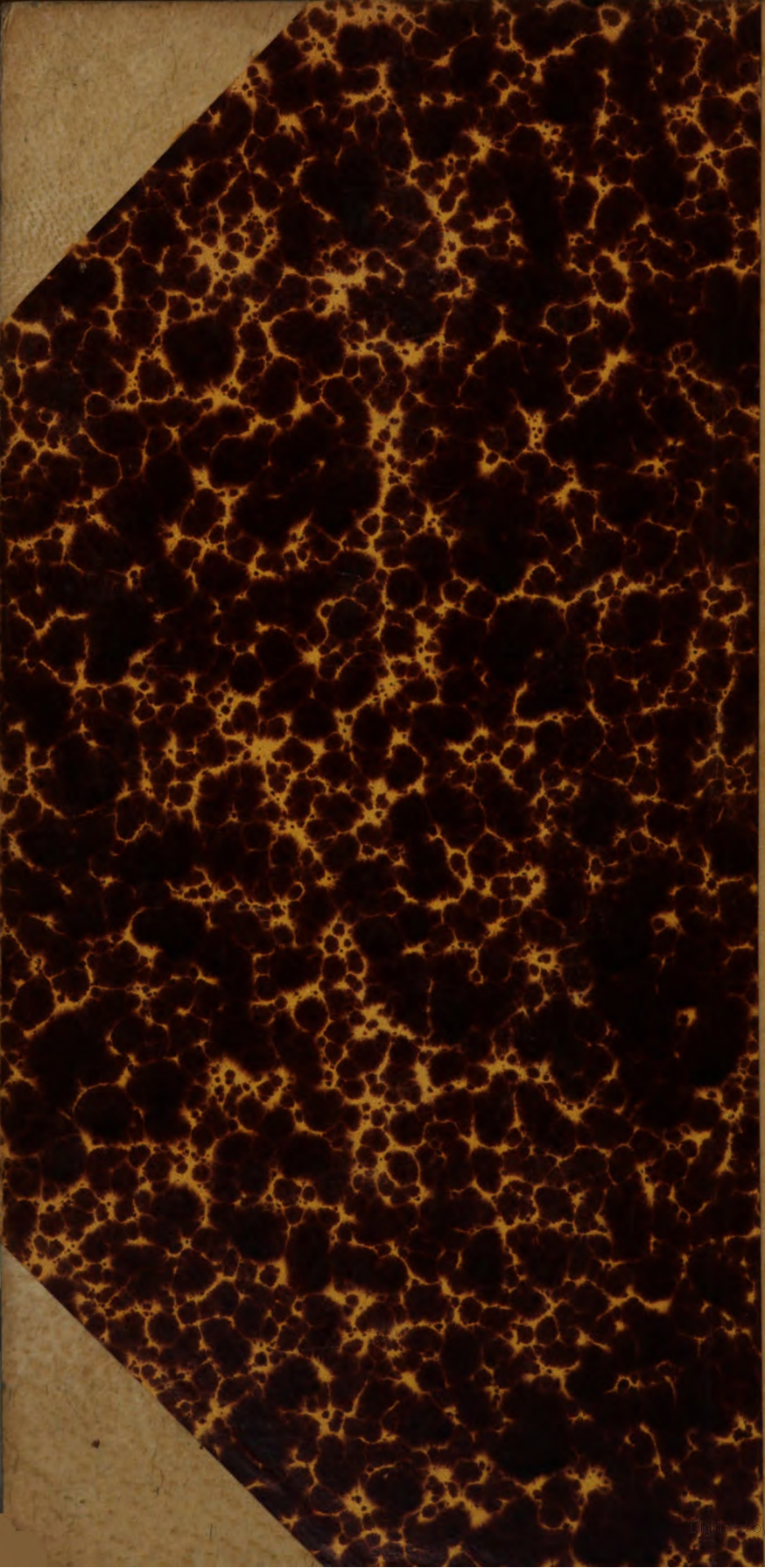
Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google